

ΑΣΚΗΣΗ 4

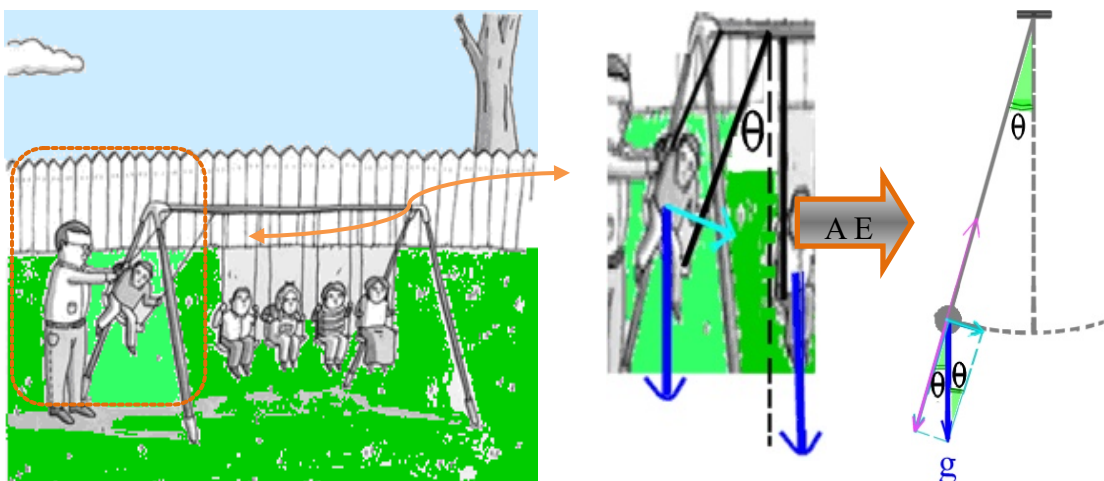
Εκκρεμές: πειράματα με απλό και σύνθετο εκκρεμές

1. Σκοπός της άσκησης

Θα εξασκηθούμε με την παλίνδρομη κίνηση ενός απλού ταλαντωτή (περίπτωση εκκρεμούς). Θα μετρήσουμε την περίοδο και την επιτάχυνση της βαρύτητας g ($g_{\pm\sigma_g}$) κάτω από διάφορες πειραματικές συνθήκες και προσεγγίσεις. Επιπλέον, θα επισημάνουμε τις περιοριστικές συνθήκες κάτω από τις οποίες επαληθεύεται ο νόμος του εργαστηριακού εκκρεμούς (**ΕΕ**) με κατάλληλη αναφορά σε δύο χρήσιμα μαθηματικά πρότυπα **ΑΕ**, και **ΦΕ**, που θα υπενθυμίσουμε. Οι πειραματικές αποκλίσεις του **ΕΕ** από το πρότυπο **ΑΕ** (ή **ΦΕ**) θα προκύψουν μέσω των μετρήσεων των (τυχαίων και συστηματικών) σφαλμάτων (ασκήσεις 1, 2, 3).

2. Εισαγωγή: 2α. Ταλαντώσεις

Στην καθημερινή μας ζωή και στο περιβάλλον συναντάμε φαινόμενα παλίνδρομων κινήσεων ή ταλαντώσεων (π.χ. κλαδιά δέντρων στον άνεμο, μετρονόμους μουσικής, κ.λ.π.). Η δυναμική E_{Δ} και η κινητική ενέργεια E_K εναλλάσσονται περιοδικά γύρω από μια θέση ισορροπίας s_0 . Εστω $s_0=0$ και $E_{\Delta}(s_0)=E_{\Delta}(0)=0$. Η δυναμική ενέργεια $E_{\Delta}(s_0)$ στη θέση ισορροπίας s_0 έχει τοπικό ελάχιστο (άρα $dE_{\Delta}/ds=0$). Αν προσεγγίσουμε την E_{Δ} (με σειρά Maclaurin) και κρατήσουμε μόνο τους 3 πρώτους όρους, τότε η E_{Δ} είναι ανάλογη του s^2 , δηλαδή $E_{\Delta}=k \cdot s^2/2$, όπου η σταθερά $k=E_{\Delta}''(0)$ ^[ΓΦ,σελ.254]. Γύρω από τη θέση ισορροπίας η δύναμη F έχει γραμμική μορφή ανάλογη του νόμου του Hook ($F = -dE_{\Delta}/ds = -k \cdot s$). Ένας ταλαντωτής που θα επιδέχεται τις παραπάνω προσεγγίσεις θα έχει την πιο απλή αλλά και χρήσιμη περιγραφή θα θεωρείται πρότυπος και θα ονομάζεται αρμονικός ταλαντωτής. Η αναλυτική θεωρία του πρότυπου αυτού μπορεί να βρεθεί σε βιβλία γενικής φυσικής^[ΓΦ,σελ.254]. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε με ένα παράγωγο ειδικό πρότυπο, το απλό εκκρεμές «**ΑΕ**»^[ΓΦ,σελ.264], όπως στο σχήμα 1γ (και σχ.2). Από την παιδική κούνια στο σχήμα 1α επιλέγουμε να αναλύσουμε την κίνηση του 1^{ου} παιδιού στο σχ.1β, με τη γνωστή περιγραφή στη φυσική του απλού εκκρεμούς (**ΑΕ**, σχ.1γ), αλλά και αντιστρόφως. Με αφετηρία το πιο απλό πρότυπο «**ΑΕ**» είναι δυνατό να εντάξουμε ένα πολύπλοκο «πείραμα στη φύση» (σχ.1α, σχ.1β) σε ένα (ήδη γνωστό μας) πρότυπο πλαίσιο: πείραμα «**ΑΕ**». Με ανάλογη κυκλική πορεία θα εργασθούμε και στην εργαστηριακή μας άσκηση: πείραμα «**ΕΕ**». Έτσι λοιπόν θα αναφερόμαστε συχνά στα ήδη γνωστά μας πρότυπα, όταν θα εκτελούμε πειράματα με τη διάταξή μας (δηλ. του εργαστηριακού εκκρεμούς «**ΕΕ**», στο σχήμα 3γ).



Σχήμα 1: Παραδείγματα εκκρεμών στο περιβάλλον. Από το περιβάλλον στην περιγραφή της φυσικής.

α. Πατέρας 5 παιδιών σε παιδική χαρά με 5 ανεξάρτητες τυπικές κούνιες. Ο πατέρας ξεκινά από το 1^ο παιδί (στα αριστερά). Ο πατέρας παρέχει αρχική ενέργεια σε κάθε παιδί ξεχωριστά. Έτσι έπονται τα υπόλοιπα 4 παιδιά (δεξιά) που θα περιμένουν τη σειρά τους στη θέση ισορροπίας (γωνία $\theta=0^\circ$).

β. Ζουμ στο 1^ο παιδί που ξεκινά την αιώριση (θέση μέγιστου πλάτους) με $g \cdot \sin\theta$. Το 2^ο παιδί έχει $g \cdot \sin\theta=0$ και δεν θα κινηθεί (εκτός αν του δοθεί αρχική ενέργεια).

γ. Το πρότυπο **ΑΕ** (και το **ΦΕ**) θα προσεγγίσει την κίνηση της παιδικής κούνιας ($g \cdot \sin\theta$, εφαπτομενική συνιστώσα του g).

2β. Παλίνδρομες κινήσεις στο περιβάλλον

Συχνά συναντάμε παλίνδρομες κινήσεις (π.χ. διακοσμητικά ρολόγια τύπου εκκρεμούς «τικ-τακ», παιδική κούνια, βάδισμα δίποδων ζώων κ.λ.π.). Αν μας ανατεθεί η μελέτη τους, τότε ποιούς δρόμους θα ακολουθήσουμε; Οι πειραματικές συνθήκες είναι πολύπλοκες, οπότε σαν οδικό χάρτη προτείνουμε ορισμένα εργαστηριακά παραδείγματα και θεωρητικά πρότυπα. Η αναφορά στο πρότυπο του απλού εκκρεμούς (ΑΕ) είναι όχι μόνο πολύ χρήσιμη αλλά και συχνά αναγκαία για την αποδοτικότερη επίλυση προβλημάτων με πραγματικά εκκρεμή στη φύση. Έτσι μόνο θα μπορέσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα τις πιο βασικές παραμέτρους στα εκκρεμή που έχουμε να μελετήσουμε. Άρα, θα εκτελέσουμε πειράματα με βάση το πρότυπο του απλού εκκρεμούς (ΑΕ) και μετά θα κάνουμε κατάλληλες διορθώσεις με κριτήριο το σφάλμα-λάθος. Το σφάλμα βρίσκεται με μεθόδους που μάθαμε στα προηγούμενα εισαγωγικά μαθήματα για εργαστηριακές δραστηριότητες και μετρήσεις (σφάλματα μετρήσεων, ΕΕΤ, κ.α.). Επιπλέον θα δούμε πως τα συστηματικά σφάλματα μας προσφέρουν ένα εργαλείο σύγκρισης του εκκρεμούς με τα ιδανικά πρότυπα. Ανάλογη χρήση της μεθοδολογίας ακολουθείται και στην αποδοτική επίλυση προβλημάτων με πραγματικά αέρια. Εκεί γίνεται μια απλή προσεγγιστική επίλυση στα προβλήματα με πραγματικά αέρια με τη χρήση του προτύπου του «ιδανικού αερίου» (κύκλος Carnot κ.λ.π.).

3. Θεωρία εκκρεμών

Το απλό εκκρεμές (ΑΕ) θα είναι η βάση μας για την αρχική περιγραφή των μετρήσεων. Όταν όμως το ΑΕ, δεν επαρκεί τότε θα χρειαστούμε ένα πιο ρεαλιστικό πρότυπο, το φυσικό εκκρεμές (ΦΕ). Το ΦΕ θα μας βοηθήσει εναλλακτικά ίσως και περισσότερο στην κατανόηση και ερμηνεία πιο σύνθετων σφαλμάτων στις προοδευτικής εκτελεστικής δυσκολίας πειράματα με τα εργαστηριακά εκκρεμή (ΕΕ).

3α. Απλό εκκρεμές (ΑΕ)

Το απλό εκκρεμές (ΑΕ) είναι το μαθηματικό πρότυπο που θα μας βοηθήσει να προσεγγίσουμε την κίνηση εργαστηριακών ή πραγματικών εκκρεμών. Όπως το ιδανικό αέριο (μαθηματικό πρότυπο) είναι μια ιδανική αφετηρία για να επιλύσουμε προβλήματα πραγματικών αερίων με κατάλληλες διορθώσεις-προσεγγίσεις που έπονται, έτσι και εδώ έχουμε το απλό ή μαθηματικό εκκρεμές. Το απλό εκκρεμές είναι μια ιδανική διάταξη που αποτελείται από:

- 1) ένα σημειακό βαρίδιο ($B=mg$) μάζας m
- 2) ένα αβαρές νήμα μήκους L που
- 3) κρέμεται από ένα σημειακό και σταθερό (ακίνητο) υποστήριγμα και για τη κίνηση έχουμε ότι:
- 4) η μέγιστη γωνία θεωρείται σαν μία απειροστή μόνο μεταβολή από την ισορροπία ($\theta=0$).

Εάν επιπλέον δεν έχουμε τριβές η ταλάντωση του απλού εκκρεμούς είναι απλή αρμονική. Η κίνηση μπορεί να περιγραφεί μέσω της γωνίας εκτροπής θ (Σχ.2α) είτε μέσω της απομάκρυνσης x (Σχ.2β) από τη θέση την ισορροπίας (όπου έχουμε $\theta=0$, $x=0$).

Στην πράξη όμως αντιμετωπίζουμε διάφορα θέματα εκκρεμών με προσεγγίσεις σε μία τουλάχιστον από τις παραπάνω συνθήκες. Στο εργαστήριο φροντίζουμε για προσεγγίσεις που αφορούν ξεχωριστά μία μόνο συνθήκη-παραμέτρο, όπως θα δούμε στο πειραματικό μέρος.

Σε μια τυχαία θέση A εκτός ισορροπίας (με απομάκρυνση x και γωνία θ από τη θέση την ισορροπίας, όπου έχουμε $\theta=0$, $x=0$) οι δυνάμεις είναι το βάρος $\mathbf{W}=mg$ και η τάση του νήματος $T=-mg \cos$. Αναλύουμε το διάνυσμα του βάρους \mathbf{W} σε δύο συνιστώσες:

1. την $\mathbf{F}=-mg \cdot \sin\theta$, εφαπτομενική προς την «κυκλική» τροχιά και
2. την $\mathbf{F}'=-T=-mg \cdot \cos\theta$, κάθετη στην εφαπτομενική, δηλαδή στην προέκταση του νήματος. Η $T=-F'=F_k$ ισούνται με την κεντρομόλο (για εμάς, ακίνητο παρατηρητή) δύναμη $F_k(=T=-F')$.

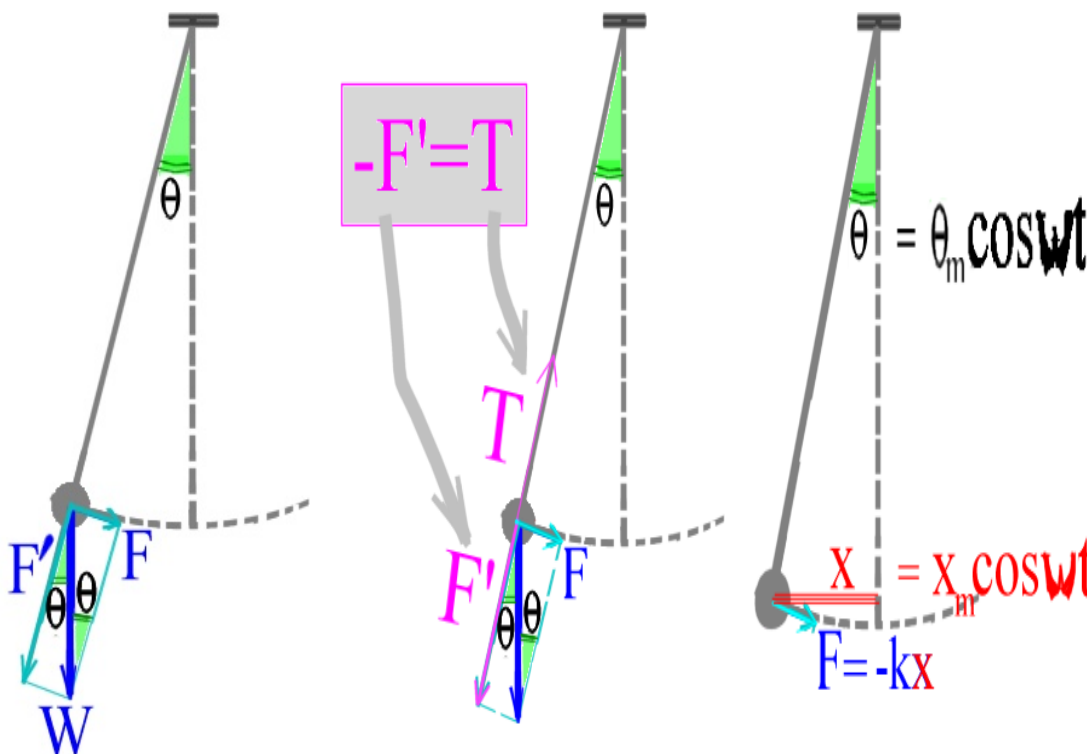
Επομένως μόνο η $1^{\text{η}}$ συνιστώσα είναι η δύναμη (\mathbf{F}) που συντηρεί την κίνηση της αιώρησης-ταλάντωσης Είναι $\mathbf{F}=-m \cdot g \cdot \sin\theta$ που για αιωρήσεις μικρού πλάτους έχουμε $\theta \sim \sin\theta = x/L$. Οπότε έχουμε:

$$F = - (mg/L) x = - mg \theta \quad [\text{για } x \gg 0, \theta \gg 0] \quad (1)$$

δηλαδή μια απλή γραμμική έκφραση ανάλογη του νόμου του Hook $F=-k x$, όπου $k=mg/L$. Ωστε η \mathbf{F} (1^η συνιστώσα του βάρους \mathbf{W}) είναι μια γραμμική δύναμη επαναφοράς και η ταλάντωση του απλού εκκρεμούς (ΑΕ) είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Η διαφορική εξίσωση της κίνησης: $m d^2x/d^2t + (mg/L) x = 0$, είναι σε πιο απλή μορφή:

$$d^2x/d^2t + (g/L) x = 0 \tag{2}$$

όπου με $\omega^2=g/L$, έχουμε $d^2x/d^2t + \omega^2 x = 0$. Η σταθερά ω καλείται κυκλική ιδιοσυχνότητα του απλού εκκρεμούς (ΑΕ).



Σχήμα 2: Απλό εκκρεμές (ΑΕ)

α. Ανάλυση του διανύσματος του εκκρεμούς βάρους \mathbf{W} σε 2 συνιστώσες \mathbf{F} και \mathbf{F}' ($\mathbf{W} = \mathbf{F} + \mathbf{F}'$)

β. Η συνιστώσα \mathbf{F}' του βάρους \mathbf{W} είναι αντίθετη της τάσης \mathbf{T} του νήματος.

γ. Η συνιστώσα \mathbf{F} του βάρους συντηρεί την αιωρική κίνηση και είναι ανάλογη της απομάκρυνσης

Η λύση της^[ΓΦ,σελ.259] είναι $x=x_m \cos(\omega t + \phi)$ που εάν για αρχικό χρόνο $t=0$ έχουμε $\cos(0)=1$ και $x(0)=x_m$, τότε $\phi=0$, οπότε:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t) \tag{3}$$

Η περίοδος T ($= \omega/2\pi$) της αιώρησης είναι $T = 2\pi \sqrt{L/g}$, δηλαδή $(T/2\pi)^2 = \omega^2 = L/g$ και την παρόμοια μορφή:

$$L = g (T/2\pi)^2 = g/(2\pi)^2 T^2 \tag{4}$$

Η απλή μορφή της σχέσης (4) είναι χρήσιμη γιατί μπορεί να εφαρμοστεί για να υπολογισθεί το g από την κλίση a_1 της **ΕΕΤ** (στη γνωστή μορφή, $y=a_1x+a_0$), όπου θα εφαρμόσουμε 1) την αντικατάσταση, $y=L$, και 2) την αντικατάσταση σε νέα στήλη $x=(T/2\pi)^2$ στη δραστηριότητα 5β. (5β.Μετρήσεις περιόδου T με το μήκος L). Επομένως τα γραμμικά διαγράμματα $y-x$ (**ΕΕΤ**), θα έχουν άξονες $L-(T/2\pi)^2$. Η κλίση, a_1 (στην **ΕΕΤ**), θα προσεγγίζει την τιμή του g (για $L \sim 248\text{mm}$). Ο σταθερός όρος, $a_0=L_0$, θα πρέπει να αξιολογηθεί και να εξηγηθεί εάν η τιμή L_0 είναι «μικρή» ή «μεγάλη», συγκρινόμενη με τα πειραματικά λάθη, $\epsilon_{i,L}$ (στη μέτρηση του μήκους L). Η εφαρμογή της σχέσης (4) αναφορικά με την έκταση των τιμών του μήκους L (180mm, 250mm), δηλαδή για τις θέσεις L του βάρους του εκκρεμούς. Για να κατανοήσουμε όμως τον περιορισμό αυτό θα πρέπει να διαβάσουμε τη θεωρία που ακολουθεί, δηλαδή το φυσικό εκκρεμές, **ΦΕ**.

3β. Φυσικό εκκρεμές (ΦΕ)

Ένα εκκρεμές (σώμα), που ταλαντώνεται εξαιτίας του βάρους του, αλλά δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν απλό εκκρεμές, ΑΕ, τότε το μελετούμε σαν φυσικό εκκρεμές, ΦΕ [ΓΦ, σελ. 266]. Το ΦΕ είναι ένα στερεό σώμα που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ένα οριζόντιο άξονα «Ο'», που δεν περνάει, όμως, από το κέντρο μάζας του, Κ. Ο άξονας «Ο'» τέμνει το κατακόρυφο επίπεδο (ΚΕ), που περιέχει το κέντρο μάζας του, Κ, σε ένα σημείο, «Ο», που ονομάζεται κέντρο εξάρτησης «Ο». Όταν το ΦΕ αποκλείνει κατά γωνία, θ , από το ΚΕ (κατακόρυφο επίπεδο) της θέσης ισορροπίας του, τότε αναπτύσσεται ροπή επαναφοράς $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{B} = -r (mg \sin\theta)$, που για $\sin\theta \sim \theta$ έχουμε:

$$M = -r (mg \theta) = - (r mg) \theta \quad (5)$$

Γνωρίζουμε ότι: $\mathbf{M} = I_0 d\omega/dt = I_0 d^2\theta/d^2t$, όπου, I_0 , η ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα «Ο'», οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} I_0 d^2\theta/d^2t &= M = -r mg \theta \\ d^2\theta/d^2t + (r mg / I_0) \theta &= 0 \\ d^2\theta/d^2t + \omega_{\Phi E}^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

όπου $\omega_{\Phi E}$, η κυκλική συχνότητα, και $T_{\Phi E}$, η περίοδος. Έχουμε επίσης: $\omega^2 = \omega_{\Phi E}^2 = r mg / I_0$, όπως και τις χρήσιμες μορφές των σχέσεων: $\omega = \omega_{\Phi E} = (r mg / I_0)^{1/2}$ και $T_{\Phi E} = 1 / f_{\Phi E} = 2\pi / \omega_{\Phi E} = 2\pi / (r mg / I_0)^{1/2}$. Έτσι, το ισοδύναμο μήκος L_{AE} (ενός ισόχρονου T_{AE} απλού εκκρεμούς ΑΕ) με περίοδο $T_{AE} = 2\pi (g / L_{AE})^{1/2}$, θα είναι:

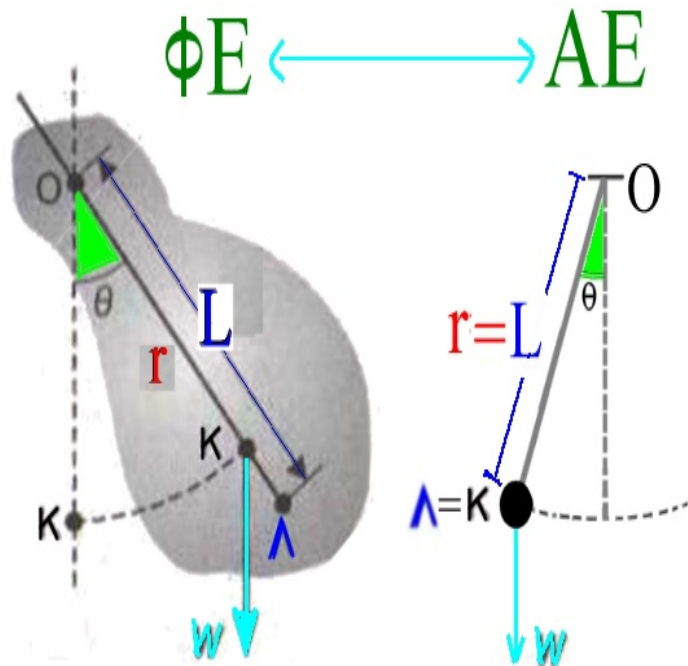
$$L_{AE} = I_0 / r m \quad (7)$$

Αυτό, το ισοδύναμο μήκος, L_{AE} , ονομάζεται ανηγμένο μήκος, $L_{A\mu\Phi E}$, του ΦΕ: $L_{A\mu\Phi E} = L_{AE}$.

Σχήμα 3: Φυσικό εκκρεμές (ΦΕ). Η γωνία θ πρέπει να θεωρείται πολύ μικρή ώστε να ισχύει η προσέγγιση $\sin\theta \sim \theta$ στη σχέση 5.

Στα δεξιά του ΦΕ φαίνεται το σχήμα του ισόχρονου T_{AE} απλού εκκρεμούς (ΑΕ) μήκους $L_{AE} = L_{A\mu\Phi E}$. Στο ισόχρονο ΑΕ έχουμε μικρότερη πολυπλοκότητα γιατί έχουμε τις ταυτότητες

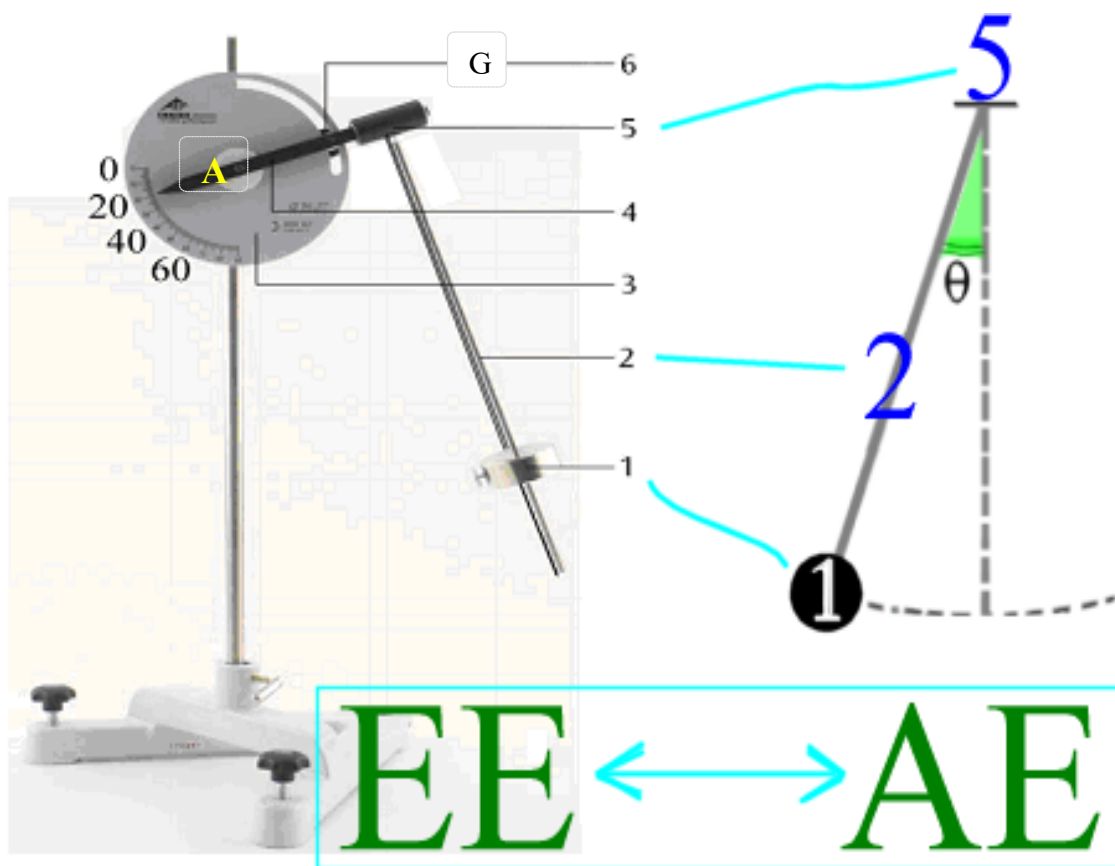
- 1) μήκους $L_{\Phi E} = L_{AE} = r_{AE}$ και
- 2) σημείων $\Lambda_{\Phi E} = \Lambda_{AE} = K_{AE}$.



Αν πάνω στην ευθεία ΟΚ μετρήσουμε ένα μήκος $Ο\Lambda$, ίσο με το ανηγμένο μήκος $L_{A\mu\Phi E} = L_{AE}$, τότε το σημείο, Λ , ονομάζεται κέντρο αιώρησης. Έτσι το ΦΕ μπορεί να αναχθεί σε ισοδύναμο ΑΕ, δηλαδή έχουμε τη μάζα $m_{\Phi E}$ του ΦΕ να ανάγεται από το στατικό σημείο Κ στο σημείο Λ (κέντρο αιώρησης). Άρα το σημείο Λ είναι συνάρτηση του κέντρου εξάρτησης «Ο». Επίσης, αν ο άξονας «Ο» μεταφερθεί παράλληλα, ώστε να περάσει από το κέντρο αιώρησης Λ , τότε το ΦΕ θα έχει την ίδια ακριβώς περίοδο $T_{A\mu\Phi E} = T_{AE}$. Ένα ειδικό ΦΕ το «αντιστρεπτό ΦΕ του Kater» στηρίζεται στην ιδιότητα ακριβώς αυτής της αντιστρεπτής εναλλαγής και ήταν ιδιαίτερα διάσημο στη μετρολογία της εποχής του (18^{ος} αιώνας). Ήταν η ακριβέστερη μέθοδος μέτρησης του τοπικού g (επιτάχυνση της βαρύτητας) και όχι μόνον. Το ΑΕ χωρίς το βάρος (#1, στο σχ.3γ) μπορεί να θεωρηθεί σαν ΦΕ (πείραμα 5α.2). Να ευρεθεί το ισοδύναμο μήκος, $Ο\Lambda = L_{AE}$ (~248.4mm, δηλ. η θέση του κέντρου αιώρησης « Λ », από το «Ο», το κέντρο εξάρτησης) από τη μέτρηση της περιόδου T . Από τη σχέση 7 (δίνεται η ροπή αδράνειας $I_0 = mL^2/3$: όπου $L=360\text{mm}$). Η απόσταση r του ΚΜ ($r=L/2=175\text{mm}$) από τον άξονα περιστροφής (5) είναι 175mm.

3γ. Πειραματικό εκκρεμές

Το πειραματικό μας εκκρεμές (σχ.3γ-αριστερά), όταν είναι καλά ρυθμισμένο, θα το αναφέρουμε σαν εργαστηριακό εκκρεμές (ΕΕ). Το ΕΕ είναι ένα (σύνθετο) φυσικό εκκρεμές ΦΕ, που μπορούμε όμως να το θεωρήσουμε, ακόμη πιο απλοικά, σαν να ήταν ένα απλό εκκρεμές ΑΕ (σχ.4, δεξιά). Αν και: 1)το βαρίδιο *δεν είναι σημειακό*, 2)το νήμα *δεν είναι αβαρές* και 3)*δεν κρέμεται από ένα σημειακό υποστήριγμα* (αλλά ένα ρουλεμάν, διαμέτρου 20mm), ωστόσο θα έχουμε κάποιες συνθήκες, που προβλέπουν μια απλοποιημένη χρήση του, *σαν να ήταν* ένα «πρότυπο ΑΕ». Επιπλέον, εάν η βάση στήριξης *δεν* είναι «καλά ρυθμισμένη» τότε 4)*δεν* θα έχουμε ούτε σταθερό (ακίνητο) υποστήριγμα (όπου υπάρχουν βίδες ρύθμισης). Ωστόσο τα σημεία Κ και Λ σε μια θεώρηση τύπου ΦΕ είναι πολύ κοντά (σχ. 3) για θέσεις του βάρους (όπως στο σχ.4), όπου $180\text{mm} < L < 250\text{mm}$ και άλλες συνθήκες (πρόβλεψη για χρήση του σαν ΑΕ). Επομένως στις αρχικές και απλές δραστηριότητες του εργαστηρίου θα θεωρηθεί σαν να ήταν ένα ΑΕ. Για την ερμηνεία, όμως, ορισμένων αποτελεσμάτων, θα χρειασθεί να έχουμε υπ' όψη μας και τη θεώρηση του ΕΕ ($B_{Al} < W$, σχ.4), δηλαδή ένα 3^ο (εργαστηριακό) πρότυπο. Το ΕΕ προαπαιτεί την εργαστηριακή μας εξοικείωση με τα πρότυπα ΦΕ και ΑΕ (σχήμα 3γ). Εδώ βρίσκεται η κατάλληλη πειραματική τακτική στη θεώρηση των μεγεθών, που απαιτείται να διερευνηθούν και συσχετισθούν μέσω νόμων (συμβατών με τα σωστά πρότυπα). Η διερεύνηση πειραματικών συνθηκών και τα πειραματικά λάθη (τυχαία και συστηματικά) στις μετρήσεις θα συσχετισθούν με τις 2 διαθέσιμες θεωρίες (πρότυπα «ΑΕ και ΦΕ») των εκκρεμών που αναφέραμε ήδη. Τα συστηματικά λάθη στη μέτρηση του μήκους L είναι τα πιο κρίσιμα, οπότε αυτά θα είναι σε 1^η προτεραιότητα για να αναλυθούν (πηγές, πρόσημο κ.λ.π.), σύμφωνα με όσα μάθαμε στο 1^ο εισαγωγικό εργαστήριο.



Σχήμα 3γ: Εικόνα του Εργαστηριακού Εκκρεμούς, ΕΕ, με κλίση του επιπέδου ταλάντωσης (γωνία: $A \sim 20^\circ$). Οι 3-γραμμές δείχνουν στα (3) στοιχειώδη τμήματα, που αντιστοιχούν στο απλό πρότυπο (αναφοράς), του Απλού Εκκρεμούς (ΑΕ). Τα βασικά μέρη του Εργ. Εκκρεμούς, ΕΕ, είναι:

1. Κυλινδρικό Βαρίδιο ($W=300\text{g}$).
2. Ραβδόνημα από αλουμίνιο (Al), “το Al-νήμα μας” ($B_{Al} \sim 80\text{g} < W=300\text{g}$, μήκους $L_{\text{max}} = \dots \text{mm} \sim 360\text{mm}$).
3. Δίσκος-γωνιόμετρο, για ανάγνωση της γωνίας A, του *Κεκλιμένου Επιπέδου της Ταλάντωσης (KET)*.
4. “Ραβδόνημα - ενδείκτης” της γωνίας A ($0^\circ < A < 90^\circ$), της γωνίας του *KET*.
5. Άξονας στήριξης (του εκκρεμούς) ραβδονήματος (ΕΕ \rightarrow ΦΕ).
6. Κοχλίας G θέτει (και σταθεροποιεί) τη γωνία A ($0^\circ < A < 90^\circ$) του *KET*.

4. Πειραματικό μέρος

4α. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται:

- A) Από το εργαστηριακό εκκρεμές (ΕΕ) και
- B) Από διάταξη μέτρησης χρόνου των περιόδων

A) Εργαστηριακό Εκκρεμές

Το Εργαστηριακό Εκκρεμές (πρότυπο ΕΕ) αποτελείται από:

A1. Ομογενές κυλινδρικό βαρίδιο, βάρους $W \sim 300\text{g}$, πάχους $d_w = \dots \text{mm} \sim 18\text{mm}$ και διαμέτρου $D = \dots \text{mm} \sim 50\text{mm}$).

A2. Αλουμινένια ράβδος (ραβδόνημα), μήκους $= \dots \text{mm} \sim 360\text{mm}$.

Ως πειραματικό μήκος L θα θεωρείται:

1. η απόσταση του κέντρου μάζας του κυλινδρικού βαριδίου A1 από τον άξονα στήριξης A5.
2. Εναλλακτικά, αντί του πειραματικού μήκους L , μπορεί να ζητηθεί η μέτρηση Λ , από την κάτω βάση του κυλινδρικού βαριδίου A1 έως το ελεύθερο άκρο της ράβδου (σχ.5β.2).

A3. Δίσκο - γωνιόμετρο για ανάγνωση γωνίας A_g , μεταξύ του επιπέδου ταλάντωσης του ραβδονήματος με την κατακόρυφο, δηλαδή του κεκλιμένου επιπέδου της ταλάντωσης (KET).

A4. Δείκτη της γωνίας A_g ($0^\circ < A_g < 90^\circ$) του κεκλιμένου επιπέδου της ταλάντωσης (KET).

A5. Άξονα στήριξης ραβδονήματος.

A6. Κοχλία (G) επιλογής της γωνίας A_g ($0^\circ < A_g < 90^\circ$) του κεκλιμένου επιπέδου ταλάντωσης (KET).

B) Διάταξη μέτρησης του χρόνου n·T

Η διάταξη αποτελείται από 3 όργανα (σχήμα 4α.1):

B1. Φωτοπύλη B_1 : Ανιχνεύει την προσωρινή διακοπή του σήματος της “οπτικής” δέσμης i_r . Η 1^η διακοπή της δέσμης σηματοδοτεί την αρχή του χρόνου μέτρησης $t=0$, η 2^η είναι για $t=T/2$ και η 3^η για $t=T$.

B2. Απαριθμητής περιόδων B_2 (electronic oscillator counter): Με τον απαριθμητή γίνεται η προεπιλογή του επιθυμητού αριθμού n των περιόδων T που θα ανιχνευτούν από τη φωτοπύλη B_1 . Οι τιμές που μπορεί να επιλεγθούν είναι 1, 2, 4, 10, 20, 50, 100 ταλαντώσεις. Ο συνολικός χρόνος $\tau = n \cdot T$ καταγράφεται στο ηλεκτρονικό χρονόμετρο B_3 .

B3. Ηλεκτρονικό χρονόμετρο (B_3) (electronic digital timer) του συνολικού χρόνου τ των n περιόδων T .

Είναι προφανές, ότι, από τη στιγμή που ο απαριθμητής περιόδων B_2 θα «δώσει την εντολή» για τη διακοπή της χρονομέτρησης, μόλις ολοκληρωθούν οι επιλεγμένες n ταλαντώσεις, αυτός (B_2) θα συνδέεται **ανάμεσα** στην φωτοπύλη B_1 και το ηλεκτρονικό χρονόμετρο B_3 .



Σχήμα 4α: Τα 3 βασικά όργανα, που συνιστούν τη διάταξη μέτρησης προεπιλεγμένου αριθμού ταλαντώσεων.

4β. Διαδικασία μετρήσεων του χρόνου T της περιόδου.**Γ) Διαδικασία μετρήσεων**

Στο ηλεκτρονικό χρονόμετρο **B₃** επιλέγουμε (με τη σειρά) τα εξής:

- Γ1.** Τροφοδοσία συσκευής: On
- Γ2.** Διακριτική ικανότητα (time resolution): επιλογή 0.01s ή 0.001s (για την πιο υψηλή διακριτική ικανότητα $\Delta t=1\text{ms}$)(θα καθορίζεται σε κάθε άσκηση)
- Γ3.** Τρόπος λειτουργίας (function mode): επιλογή στον παλμό (pulse)

Δ) Διαδικασία της 1^{ης} μέτρησης

Στον απεριθμητή περιόδων **B₂** επιλέγουμε με τον περιστροφικό διακόπτη 9 προεπιλεγμένων επιλογών ($n = 1, 2, 4, 10, 20, 40, 100, 200, 400$) τον αριθμό των ταλαντώσεων που επιθυμούμε να καταγράψουμε με το ηλεκτρικό χρονόμετρο. Στην φωτεινή ένδειξη του οργάνου, και κατά τη διάρκεια της μέτρησης, φαίνονται οι ολοκληρωμένες περιόδους που έχουν καταγραφεί. Με το που θα καταγραφεί και η τελευταία περίοδος, ο απεριθμητής «δίνει εντολή» στο ηλεκτρικό χρονόμετρο για το σταμάτημα της μέτρησης.

Με τον μεταλλικό διακόπτη 2- θέσεων (reset / count), επιλέγουμε τον μηδενισμό (reset) και την επανέναρξη μιας νέας μετρήσης (count).



Σχήμα 4β: Επιλογές στον απεριθμητή περιόδων. Θέση διακόπτη: από την τιμή του $n=100$. (Θέση Count: ON)

Δ1. Στην αρχή προεπιλέγουμε μια μικρή τιμή του n : π.χ. $n = 1$ ή 2 περιόδους T . Η μέτρηση θα σταματήσει μόλις ικανοποιηθεί η προεπιλογή μας, για συνολικό αριθμό $n \cdot T$ περιόδων.
Θέση διακόπτη: από την επιλογή «Reset» στη θέση «Count».

Για την έναρξη νέας μέτρησης, πιο αναλυτικά, έχουμε την εκτέλεση των παρακάτω διαδοχικών βημάτων:

- Δ2.** Επιλογή νέας μέτρησης: **Reset** (προετοιμασία για νέα έναρξη)
- Δ3.** Επιλογή έναρξης νέας μέτρησης: **Count**
- Δ4.** Λήξη μέτρησης: Γίνεται αυτόματα με την ηλεκτρονική λήξη της μέτρησης δηλ. την ικανοποίηση της προεπιλογής για συνολικό αριθμό $n \cdot T$ περιόδων και τη καταγραφή του χρόνου με το ηλεκτρονικό χρονόμετρο.

E1) Διαδικασία της 2^{ης} μέτρησης

Διαδικασία της 2ης μέτρησης: επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα (**Δ2**, **Δ3**, **Δ4**).

E2) Διαδικασία της n ^{ης} μέτρησης

Διαδικασία n ^{ης} μέτρησης: επαναλαμβάνουμε τα βήματα **Δ2**, **Δ3**, **Δ4**.

5. Εκτέλεση (4) πειραματικών δραστηριοτήτων

Στο, αμιγώς, εργαστηριακό μέρος της άσκησης θα ασχοληθούμε με τις εξής θεματικές ενότητες:

A/A	§5	Πίνακας 1: Θέματα (4) πειραματικών δραστηριοτήτων
1	α. α1	Εξοικείωση με τα όργανα (και στοιχειώδη εξαρτήματα: B_1, B_2, B_3) της διάταξης του εκκρεμούς. Απλές μετρήσεις της περιόδου T ($\sim 1s$) σε ένα μόνο μήκος L : Εξοικείωση με τα όργανα (και στοιχειώδη εξαρτήματα: B_1, B_2, B_3) της διάταξης του εκκρεμούς.
2	α2	5α.2 Μετρήσεις περιόδου T ($\sim 1s$) σε φυσικό εκκρεμές
	β.	Μετρήσεις της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g .
3	β1	Μέτρηση g : Γης
4	β2	Μέτρηση g : Σελήνης
5	γ.	Μετρήσεις του G με την κλίση A_g (του επιπέδου ταλάντωσης)
6	δ.	Διερεύνηση της εξάρτησης της περιόδου T από το μέγιστο πλάτος θ_m

Στον ιστότοπο του εργαστηρίου υπάρχουν και άλλες προτάσεις πειραματικών δραστηριοτήτων (Εργασίες για το σπίτι: πίνακας 6, κ.λπ.: η επιλογή θα γίνεται από το διδάσκοντα).

5α. Απλές μετρήσεις περιόδου T : σε σταθερό μήκος L

Εδώ θα εξοικειωθούμε με τα στοιχειώδη εξαρτήματα της διάταξης του εκκρεμούς (**ΕΕ**). Στόχος μας θα είναι η μελέτη (και διερεύνηση) των εργαστηριακών παραμέτρων/συνθηκών στην πειραματική διαδικασία μέτρησης μιάς περιόδου, T . Επειδή η τυπική τιμή της περιόδου θα είναι, ήδη, γνωστή $T_1 (=1s)$, τότε ο υπολογισμός (τυχαίων και συστηματικών) σφαλμάτων (στην περίοδο, T), $\epsilon_T (=T-1s)$, θα είναι ο πρώτος άξονας (και εργαλείο) στην έναρξη της μελέτη μας με τη διάταξη του Εργαστηριακού Εκκρεμούς (**ΕΕ**).

5α.0 Προετοιμασία για μετρήσεις περιόδου T ($\sim 1s$)

Σε σταθερό μήκος L (ιδανική τιμή, $L_{AE}=248mm$), θα μετρήσουμε την περίοδο T_1 ($\sim 1.00s \pm 0.05s$). Μετά την εξοικείωση με τη διάταξη του εκκρεμούς θα εξετάσουμε τη συσχέτιση των μετρήσεων στο **ΕΕ** με ιδανικές τιμές στα πρότυπα (**ΑΕ** και **ΦΕ**).

Στο μέρος αυτό θα αναγνωρίσετε τα μέρη της διάταξης. Θα ξεκινάτε με κριτήριο την παράμετρο της γωνίας μέγιστης εκτροπής θ_m , δηλαδή δίνουμε μόνο μια αρχική δυναμική ενέργεια $E_{mδ}$. Έτσι θα παράγετε απλές ταλαντώσεις με σχετικά μεγάλη αρχική (μέγιστη) γωνία εκτροπής ($\theta_m \sim 45^\circ$) και θα μετρήσετε την περίοδο T με τη βοήθεια του συστήματος «φωτοπύλης». Θα ξεκινήσετε να μετράτε την περίοδο T σύμφωνα με τις οδηγίες 4β2 (Διαδ. 1ης μέτρησης), 4β3 (Διαδ. 2ης μέτρησης), και 4β4.

Αρχικά θα έχουμε τη συνθήκη: $n=1$, σαν επιθυμητό αριθμό « n περιόδων» στον απαριθμητή περιόδων B_2 . Οι μετρήσεις της περιόδου T θα γίνουν κοντά σε μία προεπιλεγμένη τυπική τιμή $T \sim 1s$. Έτσι θα έχουμε την ευκαιρία να διορθώσουμε ενδεχόμενα συστηματικά σφάλματα στη διαδικασία της μέτρησης. Εδώ το σφάλμα θα ορισθεί από τη σχέση: $\epsilon_{T1} = (T-1s)$. Εάν έχουμε $\epsilon_T > 0.1s$, τότε διερευνούμε τις πειραματικές συνθήκες για σφάλματα και μετά τις αλλαγές επαναλαμβάνουμε όλες τις μετρήσεις. Εάν συνεχίζουμε να έχουμε $\epsilon_T > 0.1s$, τότε καλούμε το διδάσκοντα για βοήθεια.

5α.1 Μετρήσεις περιόδου T_1 (~1s) σε απλό εκκρεμές: διερεύνηση του πρότυπου ΑΕ

Στον απεριθμητή περιόδων B_2 , επιλέγουμε: $n=1$, για μέτρηση χρόνου, που αντιστοιχεί σε μία ($n=1$) ταλάντωση, περίοδο T_1 . Θέτουμε το βάρος W στο μήκος $L_1 = 248\text{mm}$ ($L_1 = L_{\text{max}} - (\Delta + d_w/2)$) και θα μετρήσουμε, 10 φορές/χρόνους, δηλ. τις προσεγγιστικές ($\theta_m \gg 1^\circ$) τιμές/μετρήσεις χρόνου, της (ψευδο) περιόδου, T_1 . Με αρχική γωνία (μέγιστης) εκτροπής, $\theta_m \sim 45^\circ$ ($\gg 1^\circ$), θα έχουμε πάνω από ($\tau=$)5min μέχρι να αποσβεσθούν σε μεγάλο πειραματικό-χρόνο, « τ » ($\tau_{\text{max}} \sim 15\text{min}$), που θα τον μετρήσουμε από ένα άλλο (2°) χρονόμετρο (π.χ. το κινητό μας). Άρα, θα μετράμε την περίοδο T_1 με “τυπικό ρυθμό”: 1 φορά, ανά (πειρ. -χρόνο, « τ ») 30s.

Θα συνεχίσετε να μετράτε τη επόμενη τιμή της περιόδου T_1 , με μία απλή ενέργεια, μόνο με την εναλλαγή ενός (τύπου: ‘on/off’) διακόπτη και καταγραφή/μέτρηση του χρόνου (T_1). Στην πράξη, εναλλάξετε διαδοχικά τον διακόπτη: ‘Count / Reset’, 10 φορές, για να καταγράψετε, τις 10 τιμές, T_1 , στον παρακάτω Πίνακα (5α.1).

Πότε πιστεύετε ότι θα έχετε το μικρότερο σφάλμα στη μέτρηση της περιόδου ϵ_{T1} ; Γιατί;

.....

Πότε πιστεύετε, ότι η μέτρηση του g , με αυτή τη μέθοδο, θα είναι ακριβέστερη; Γιατί;

.....

Πίνακας 5α.1: Μετρήσεις περιόδου T_1 (για $n=1$, $\theta_{1m} \sim 45^\circ$).

α/α	« τ »	Περίοδος T_1	Σφάλμα $\epsilon_{T1} (=T_1-1s)$	g_τ	Σφάλμα $\epsilon_g = g_\tau - 9.81$	Σχόλια
	min	s	s	m/s^2	m/s^2	
1	0.0	$T_{1\eta}$				($\theta_m \sim 45^\circ$)
2	0.5					
3	1.0					
4	1.5					
5	2.0					
6	2.5					
7	3.0					
8	3.5					
9	4.0					
10	4.5	$T_{10\eta}$				($T_{1\eta} - T_{10\eta} = \dots ? > 0$;)
11						($T_{10\eta} \rightarrow T_{AE}$;)
		$\mu_0 = T_{1m}$				

Εργασία για το σπίτι:

1) Να υπολογισθεί ο μέσος όρος T_{1m} (περιόδων): **α)** για τις 3 πρώτες μετρήσεις [$N=3$], T_α , και **β)** για τις 3 τελευταίες μετρήσεις [$N=3$], T_β . Γιατί, $T_{1\eta} - T_{10\eta} > 0$, και $T_\alpha - T_\beta > 0$;

2) Να γίνει διάγραμμα T_1 (τ), δηλ. εξέλιξη της περιόδου T_1 [σε s] με τον πειραματικό-χρόνο μέτρησης (στη στήλη) « τ » [σε min]. Χαράξτε 3 οριζόντιες γραμμές (με άλλο χρώμα) στο ύψος T_α , T_β , των 2 παραπάνω μέσων όρων της περιόδου T_{1m} , και μία ακόμη οριζόντια γραμμή στο ύψος της περιόδου $T_{AE}=1s$ (κοντά στο «πρότυπο-ΑΕ»).

3) Να γίνει διάγραμμα των σφαλμάτων $\epsilon_{T1}(\tau)$ με το χρόνο μέτρησης τ (min). Να εξηγήσετε πότε το πρότυπο ΑΕ ισχύει καλύτερα ($\epsilon_{T1,10\eta}$;). Να εξηγήσετε γιατί.

4) Να γίνουν τα διαγράμματα του $g_\tau(\tau)$ και του σφάλματος $\epsilon_g(\tau)$. Πότε έχουμε τη μικρότερη τιμή ϵ_g ($\epsilon_{g,10\eta}$;). Να εξηγήσετε γιατί.

5α.2 Μετρήσεις περιόδου T (~1s) σε φυσικό εκκρεμές («ΦΕ», χωρίς βάρος W)

Στον απεριθμητή B_2 , επιλέγουμε: $n=1$. Αφαιρούμε προσεκτικά το βάρος W . Άρα, χωρίς βάρος W , στο φυσικό εκκρεμές «ΦΕ» (του «μη αβαρούς νήματος»), θα καταγράψουμε 10 μετρήσεις της περιόδου, T_1 . Θα τις καταγράψουμε, με το χρόνο (στη στήλη) «τ», καθώς θα μειώνεται η αρχική γωνία $\theta_{\text{εκτ}}$ εκτροπής, λόγω απωλειών ενέργειας. Με μεγαλύτερη αρχική γωνία εκτροπής $\theta_m \sim 60^\circ$, θα έχουμε, τώρα λιγότερο πειραματικό-χρόνο «τ», αλλά πάνω από ~1min, μέχρι να αποσβεσθούν ($\theta_m < 1^\circ$) οι ταλαντώσεις στο «ΦΕ». Άρα, θα μετράμε την περίοδο T_1 , τώρα με μεγαλύτερο “ρυθμό” (και με $n=1$), στον ενδεικτικό πειραματικό-χρόνο κάθε μιάς μέτρησης (στη στήλη) «τ» [σε s], του Πίνακα 5α.2.

Σημειώστε α)τι κρατάμε σταθερό και β)τι μεταβάλλουμε ανάμεσα στις δύο αυτές (φαινομενικά παρόμοιες) δραστηριότητες, 5α.1 (κανονικά, με το βάρος W , «πρότυπο-ΑΕ») και 5α.2 (εδώ, όπου αφαιρούμε το βάρος W , «πρότυπο-ΦΕ»).

Τι διερευνούμε στη δραστηριότητα αυτή;

T_1 , (για $n=1$) και ε_{T_1} με τον ενδεικτικό πειραματικό-χρόνο «τ»:.....

Πίνακας 5α.2: Μετρήσεις περιόδου T_1 (για $n=1$) σε φυσικό εκκρεμές («ΦΕ», χωρίς βάρος- W)

α/α	«τ»	Περίοδος T_1	Σφάλμα $\varepsilon_{T_1} = (T_1 - 1s)$	g	Σφάλμα $\varepsilon_g = g - 9.81$	γωνία $\theta_{\text{max, εκτροπής}}$
	s	s	s	m/s ²	m/s ²	ο
1	1	$T_{1\eta}$				60
2	3					
3	5					
4	10					
5	15					
6	20					
7	25					
8	30					
9	40					
10	60	$T_{10\eta}$				
		$\mu_0 = T_{1m}$				

Εργασία για το σπίτι:

1) Να υπολογισθεί ο μέσος όρος περιόδου T_{m1} : α) T_α , για τις 3 πρώτες μετρήσεις [$N=3$], αλλά και β) T_β , για τις 3 τελευταίες μετρήσεις [$N=3$].

2) Να γίνει διάγραμμα $T_1(\tau)$ με το χρόνο της μέτρησης τ [σε s]. Χαράξτε 3 οριζόντιες γραμμές (με άλλο χρώμα) στο ύψος των 2 παραπάνω μέσων όρων T_α , T_β , και μία ακόμη οριζόντια γραμμή στο ύψος της αναμενόμενης περιόδου $T_{AE}=1s$. Να ευρεθεί η ροπή αδράνειας, I_0 ($=mL^2/3$, $m=80g$, $L=L_{\text{max}} \sim \dots mm$), σ' αυτο το (χωρίς το βάρος- W) φυσικό εκκρεμές (πρότυπο «ΦΕ»). Να ευρεθεί το (ισοδύναμο) μήκος L_{AE} , που ονομάζεται ανηγμένο μήκος, $L_{\text{αμΦΕ}} (=0L')$, στο L' έχουμε τη θέση του κέντρου αιώρησης, σχέση 7). Είναι σωστή η σχ.: $0L' > L_{\text{max}}/2 = r \sim \dots/2$; Γιατί;

3) Να γίνει διάγραμμα των σφαλμάτων $\varepsilon_{T_1}(\tau)$ με το χρόνο μέτρησης τ [σε s]. Να εξηγήσετε πότε το πρότυπο ΦΕ (μη αβαρές νήμα) ισχύει καλύτερα ($\varepsilon_{T_1,10\eta}$), και να εξηγήσετε γιατί. Να γίνει σύγκριση με τα (αντίστοιχα) σφάλματα στο προηγούμενο πείραμα (5α.1).

4) Να υπολογισθεί το g (από τη σχ. $T_{\Phi E}=2\pi/(r mg/I_0)^{1/2}$) και το σφάλμα ε_g ($=g-9.81m/s^2$). Πότε έχουμε τη μικρότερη τιμή ε_g ($\varepsilon_{g,10\eta}$);). Εξηγήστε γιατί.

5β.1 Μέτρηση του g_T

Η μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g_T στο χώρο του εργαστηρίου μας ανάγεται σε μετρήσεις της περιόδου ταλάντωσης T σε κατακόρυφο επίπεδο με το μήκος L του εκκρεμούς (ΕΕ). Η περιοχή επιλέξιμων τιμών μήκους L φαίνεται στο σχήμα 5α.

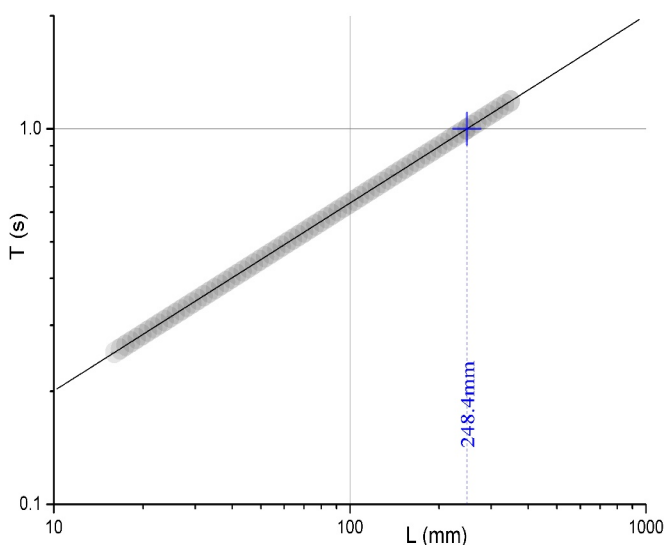
Σχήμα 5β.1:

Γραφική παράσταση της περιόδου T με το επιλέξιμο μήκος L . Η έκταση τιμών στο μήκος L του εκκρεμούς ΕΕ θα είναι μέσα στην περιοχή τιμών του μήκους L (σχέση 4).

Η έκταση **επιλέξιμων** τιμών επισημαίνεται με το **πιο έντονο** ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας γραμμής του διαγράμματος "λογ-λογ" (με λογαριθμικούς άξονες:

$$\log T = 0.5 \cdot \log L + C ,$$

$$\text{όπου } C = \log(2\pi/g^{0.5}) .$$



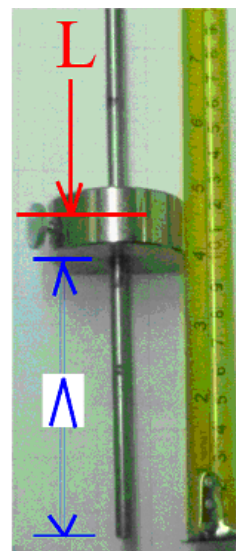
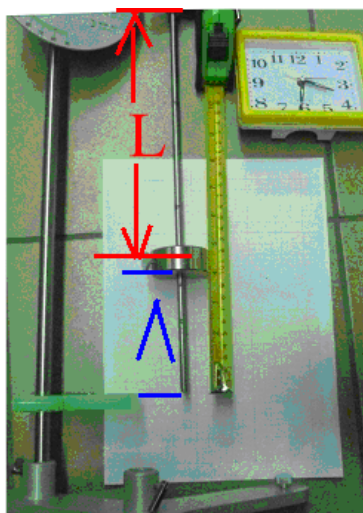
Η περίοδος T εξαρτάται από την παράμετρο του μήκους L (σχ. 5β.1). Στο μήκος L ταλαντώνεται η θεωρητικά «σημειακή» μάζα του απλού εκκρεμούς (ΑΕ), όπως αναφέρθηκε στη θεωρία του ΑΕ (παράγραφος 3α). Ομως, αντί του θεωρητικού μήκους L , εμείς θα μετράμε τη συμπληρωματική του τιμή, δηλαδή το μήκος Λ (σχ. 5β.2). Ετσι μειώνονται τα συστηματικά σφάλματα στο μήκος (γιατί;). Σε κάθε μια, πρωτογενώς μετρούμενη θέση Λ , θα εκτελούνται μετρήσεις περιόδου T_n με $n=4$ (βλέπε σχήμα 4β). Έτσι θα συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα 5β.1.

Σχήμα 5β.2:

Μετρήσεις του μήκους Λ του εκκρεμούς ΕΕ για το θεωρητικό μήκος L του εκκρεμούς (ΑΕ).

Στα δεξιά φαίνεται καλύτερα η πρωτογενώς μετρούμενη θέση Λ του εκκρεμούς ΕΕ.

Σημείωση: Ο Κοχλίας (6, Σχήμα 3γ) G που θέτει τη γωνία $A_g=0^\circ$ (τώρα, θα είναι στο 0°).



Πίνακας 5β.1: Μέτρηση του g από μετρήσεις περιόδου T_2 με το μήκος L ($L_{max} \sim 360 \text{ mm}$)

α/α	Μήκος L mm	(2*περίοδοι) T_2 s	Περίοδος T_1 ($=T_2/2$) s	Μήκος L_π ($\sim L_{max} - (L + d_w/2)$) mm	g m/s ²	Σφάλμα ε_g ($= g - 9.81$) m/s ²
1	25					
2	35					
3	50					
4	75					
5	100					
6	112				(9.81) ;	Ελάχιστο ;
7	120					
8	130					
9	150					
10	200					
11	250					
12	300					
13						

Εργασία για το σπίτι:

1. Να γίνει το διάγραμμα, $\log T_1 - \log L_\pi$, και να υπολογισθεί η **EET**. Μετά να υπολογισθεί το g και το λάθος ε_g ($= g - 9.81 \text{ m/s}^2$). Να αξιολογηθεί ο σταθερός όρος στις **EET** και να εκτιμηθεί η επίδραση του σταθερού όρου στα λάθη ε_g του g . Να γίνουν τα διαγράμματα $L_\pi - \varepsilon_g$.

2. Να γίνει το διάγραμμα, L_π με το L_{AE} , όπου $L_{AE} = g(T/2\pi)^2$. Να υπολογισθεί η **EET** ($L_\pi - L_{AE}$) και να αξιολογηθεί και ο σταθερός όρος.

3. Επιπλέον να ξαναγίνουν τα διαγράμματα $\log T_{1n} - \log L_\pi$ μόνο για 5 από τις 10 μετρήσεις του πίνακα 5β, όπου η έκταση τιμών του L περιέχει τα μικρότερα λάθη (ενδεικτικά: από τη σειρά, ' $\alpha/\alpha > 4$ ', έως και τη σειρά, ' $\alpha/\alpha > 8$ '). Να γίνει νέα αξιολόγηση στα λάθη και να διερευνηθούν αυτά συσχετίζοντάς τα με τα κριτήρια στα 2 πρότυπα: **AE** και **ΦΕ** (**AE** στην παράγραφο 3α. και **ΦΕ** στη παράγραφο 3β.).

Προαιρετικά: Οι μετρήσεις περιόδου T_n μπορεί γίνουν και για 3 άλλες ομάδες αριθμών περιόδων $n = \{1, 4, 10\}$.

Πίν. 5β.1β: Σύγκριση προαιρετικών μετρήσεων του g (ανάλογα με τον αριθμό n μετρήσεων των περιόδων).

α/α	αριθμό περιόδων n	g	Λάθος ε_g ($\varepsilon_g = g - 9.81$)	Σχόλια
1	1			
2	2			
3	4			
4	10			

5β.2 Μέτρηση του g_{Σ} της σελήνης

Παρόμοια με την παραπάνω δραστηριότητα 5β.1 έτσι και η μέτρηση της επιτάχυνσης της σεληνιακής βαρύτητας g_{Σ} ($=0.166g_{\Gamma}$, $1.625m/s^2$) ανάγεται επίσης σε μετρήσεις της περιόδου T με το μήκος L , αλλά με μία διαφορά. Τώρα, το εκκρεμές θα κινείται σε ένα (όχι κατακόρυφο, αλλά) κεκλιμένο επίπεδο ταλάντωσης (KET). Η αλλαγή του επιπέδου ταλάντωσης επιτυγχάνεται με αλλαγή της γωνίας A_{β} , από 0° , σε 80° (80.4° , με ανοχή $<2^{\circ}$), όπως φαίνεται στο σχήμα 5γ.1 (όπου το $A_{\beta}=20^{\circ}$ είναι άλλο παράδειγμα). Τώρα η κινούσα δύναμη της ταλάντωσης θα μειωθεί. Στην εργασία σας να κάνετε κατάλληλο σχήμα και να το εξηγήσετε αναλυτικά. Θα εκτελέσουμε τα παρακάτω τεχνικά βήματα:

- 1) Αρχικά, ξεβιδώνουμε, και αφαιρούμε με προσοχή, το βάρος της ταλάντωσης, χειροκίνητα. Σημείωση: Δεν το αφήνουμε να πέσει κάτω χωρίς έλεγχο.
- 2) Αλλάζουμε πολύ προσεκτικά τη γωνία του επιπέδου ταλάντωσης, όπως επεξηγείται αναλυτικά στη επόμενη παράγραφο και φαίνεται στο σχήμα 5γ.1.
- 3) Βιδώνουμε (προσεκτικά, και όχι υπερβολικά) τον κοχλία #6 (G#6 στο σχήμα 5γ.1), ώστε να στερεωθεί "επαρκώς" το επίπεδο ταλάντωσης του **ΕΕ**.
- 4) Τοποθετούμε και βιδώνουμε (προσεκτικά, και όχι υπερβολικά) το βάρος της ταλάντωσης σε κατάλληλη θέση που έχει μήκος L (σχήμα 5β), όπως προτείνεται στην 1η σειρά του πίν. 5β2.

Παρόμοια με την προηγούμενη δραστηριότητα 5β.1 και εδώ θα συμπληρώσουμε τον παρακάτω πίνακα 5β.2., για 10 μετρήσεις (περίοδου) T_n (L) με το μήκος L .

Πίνακας 5β.2: Μετρήσεις περιόδου T με το μήκος L (για μέτρηση του g_{Σ}).

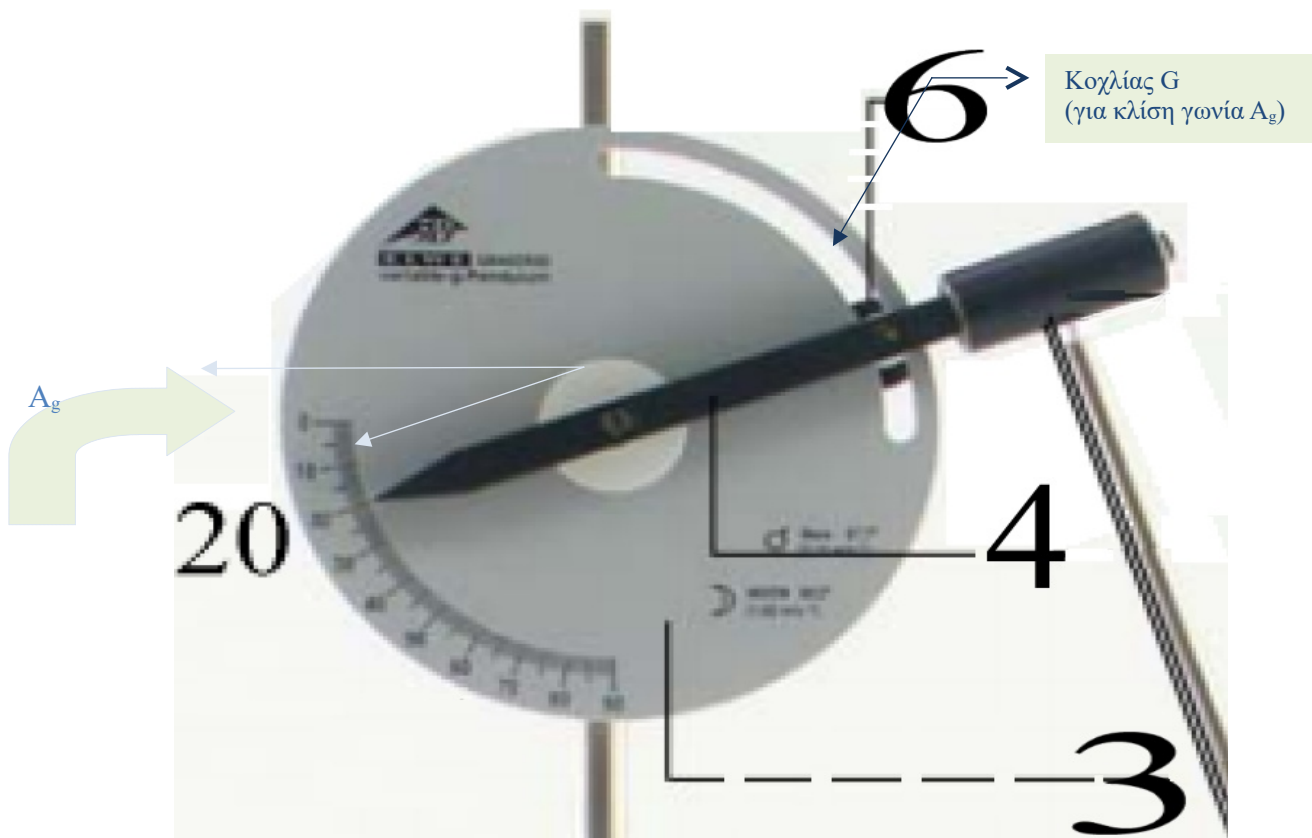
α/α	Μήκος L	Περίοδος T_1	Μήκος L_{π} ($\sim L_{\max} - (L + d_w/2)$)	g_{Σ}	Σφάλμα $\varepsilon_{g_{\Sigma}}$ ($= g_{\Sigma} - 1,625$)
	mm	s	mm	m/s ²	m/s ²
1	25				
2	50				
3	75				
4	90				
5	100				
6	112	Ελάχιστο;			
7	120				
8	130				
9	140				
10	150				
11	190				
12	240				

Εργασία για το σπίτι:

1. Να γίνουν τα διαγράμματα $\log T_2 - \log L_{\pi}$ και να υπολογισθεί η **EET**_n. Μετά να υπολογισθεί το g_{Σ} και το λάθος $\varepsilon_{g_{\Sigma}}$. Να αξιολογηθεί ο σταθερός όρος στην **EET** και να εκτιμηθεί η επίδραση του σταθερού όρου στα λάθη $\varepsilon_{g_{\Sigma}}$ του g_{Σ} . Να γίνουν τα διαγράμματα $L_{\pi} - \varepsilon_{g_{\Sigma}}$.
2. Να γίνουν τα διαγράμματα L με το L_{AE} , όπου $L_{AE} = g_{\Sigma}(T/2\pi)^2$. Να υπολογισθεί η **EET**.

5γ. Μετρήσεις του G με την κλίση A_g του επιπέδου ταλάντωσης

Οι μετρήσεις του ρυθμιζόμενου G (τεχνητού g , $G=g \cos A_g$) με τη γωνία κλίσης A_g θα γίνουν με παράμετρο το μήκος L του εκκρεμούς (όπως περιγράφεται στο μέρος 5α). Προτείνεται σαν βέλτιστη παραμετρική τιμή του μήκους L (η ιδανική τιμή $L_{AE}=248\text{mm}$, εναλλακτικά: $T_1=1.00\text{s}\pm 0.05\text{s}$), για να έχουμε σε ισχύ το πιο στοιχειώδες πρότυπο **ΑΕ** (ιδιότητες-προδιαγραφές «πρότυπου **ΑΕ**»). Αυτή η ιδανική τιμή του μήκους L_{AE} παραμένει **σταθερή** στη δραστηριότητα αυτή. Η γωνία κλίσης A_g του επιπέδου ταλάντωσης θα μετρηθεί όπως φαίνεται στο σχ.5γ.1.



Σχήμα 5γ.1: Κοχλίας G (#6) με την μετακίνηση του οποίου θέτουμε την επιθυμητή γωνία A_g ($0^\circ < A < 90^\circ$) (μεταξύ του επιπέδου ταλάντωσης ραβδονήματος με την κατακόρυφο). Στον δίσκο - γωνιόμετρο επιλέγουμε την τιμή της γωνίας A_g . Ιδανική τιμή (στο **ΑΕ**): $L=248\text{mm}$.

Οι μετρήσεις της περιόδου T_n με τη γωνία κλίσης A_g , παράμετρο τον αριθμό n στο αντίστοιχο θεωρητικό διάγραμμα σχ.5γ.2. Εδώ, θα ξεκινάτε παράγοντας, μόνο απλές ($\theta_m < 10^\circ$) ταλαντώσεις (**ΑΕ**). Έχουμε πάντοτε πολύ μικρή γωνία (μέγιστης) εκτροπής.

3. Με το βαρίδιο W στην κατάλληλη θέση ($L=248\text{mm}$), θα ξεκινήσετε να παίρνετε μετρήσεις κατά τα γνωστά (παράγραφος **4β**). Έχουμε γωνία $A_g=0$ στην 1^η μέτρηση.
4. Θέτουμε $n=1$ στη συσκευή B2 (σχ. 4α) για την περίοδο T_1 .
5. Επαναλαμβάνουμε το παραπάνω βήμα 2, για τις επόμενες μετρήσεις μας, μετά την αλλαγή της γωνίας κλίσης A_g . Επιλέγουμε τις τιμές που υπάρχουν στη στήλη των προτεινόμενων τιμών A_g του πίνακα 5γ. Συμπληρώστε 10 μετρήσεις στον παρακάτω πίνακα 5γ.

Από τις στήλες της περιόδου T_n με τη γωνία κλίσης A_g του πίνακα 5γ. να γίνουν πειραματικά διαγράμματα ($A_g - T_n$) για $n=1$, όπως φαίνεται στο αντίστοιχο θεωρητικό διάγραμμα σχ.5γ.2.

Πίνακας 5γ: Μετρήσεις περιόδων T_n με τη γωνία κλίσης A_g
(Μετρήσεις τεχνητού g , $G=g \cos A_g$)

α/α	γωνία A_g	Περίοδος T_1	G ($=g \cos A_g$)	Σφάλμα ϵ	Σχόλια
	°	s	m/s ²	m/s ²	
1	0				($\theta_m \sim 3^\circ$)
2	5				
3	10				
4	30				
5	40				
6	50				
7	60				
8	70				
9	76				
10	80				
11	82				
12	85				
13	88				

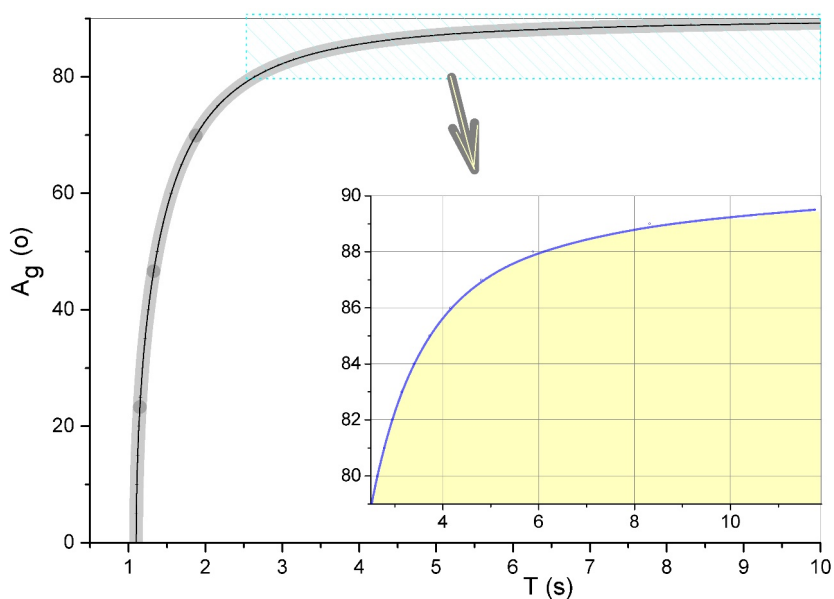
Η γωνία κλίσης A_g μας αλλάζει τις τιμές του φαινομένου $G=g \cdot \cos A_g$, που έχουν δραστική επίδραση κυρίως στις μεγάλες γωνίες A_g , όπως φαίνεται στο σχ.5γ.2. Επομένως χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στις μεγάλες γωνίες A_g .

Εργασία για το σπίτι:

- 1) Από τις μετρήσεις της περιόδου T με τη γωνία κλίσης A_g του πίνακα 5γ να γίνει σε ένα διάγραμμα (μία καμπύλη για καθένα από τα πειραματικά T_1 και T_2 , για **ΕΕ** και η θεωρητική καμπύλη για **ΑΕ**) ανάλογο με το αντίστοιχο θεωρητικό διάγραμμα (**ΑΕ**) που φαίνεται στο σχ.5γ.2.
- 2) Από τις παραπάνω μετρήσεις να γίνει πειραματικό διάγραμμα $G-\cos A_g$, και από την κλίση στην **ΕΕΤ** να υπολογιστεί το g .
- 3) Να σχολιασθεί και ο σταθερός όρος της **ΕΕΤ**.

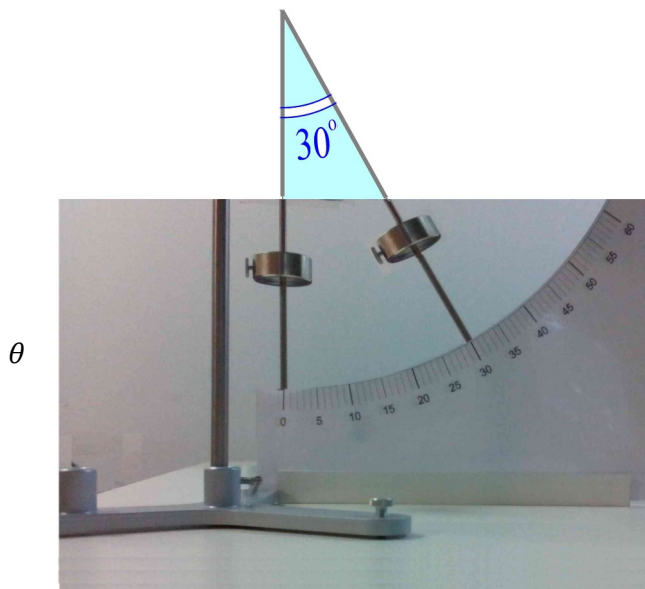
Σχήμα 5γ2:

Επίδραση της γωνίας κλίσης A_g στο $G(A_g)$. Η γωνία κλίσης A_g θα μετρηθεί όπως φαίνεται στο **σχ.5γ.1**, το πρότυπο "ΕΕ" του εργαστηρίου.



5δ. Διερεύνηση της εξάρτησης της περιόδου T από το μέγιστο πλάτος θ_m

Το **ΕΕ** συμπεριφέρεται ως το πρότυπο **ΑΕ**, μόνον όταν το πλάτος θ_m της γωνίας εκτροπής τείνει στον μηδέν, οπότε έχουμε: $\sin(\theta_m) \sim \theta_m$. Θα εξετάσουμε, τώρα, κατά πόσο θα αυξηθούν τα σφάλματα της περιόδου T , όταν η αρχική γωνία θ_m θα γίνει πάρα πολύ μεγάλη ($\theta_m \gg 2^\circ$). Η πειραματική διάταξη του **ΕΕ** για το σκοπό αυτό φαίνεται στο σχ. **5δ.1α**. Η εξάρτηση αυτή, όμως, είναι, σχετικά, πάρα πολύ μικρή $\varepsilon_{\theta_m} < 12\%$, για στην μεσαία περιοχή του L : $180\text{mm} < L < 250\text{mm}$. Από την επίδραση αυτή προκύπτει η αντίστοιχη μεταβολή (σύμφωνα με τους κανόνες μετάδοσης σφαλμάτων) και στις τιμές του παραγόμενου g , που είναι επομένως αναμενόμενο ότι, θα αποτυπωθεί και στα σφάλματα του g .



Σχήμα 5δ.1:

Θέτουμε την τιμή της αρχικής γωνίας θ_m σε ενδεικτική τιμή 30°

Ξεκινάμε με τη μέτρηση του αρχικού πλάτους θ_m της γωνίας στη μεγαλύτερη τιμή του πίνακα 5δ ($\theta_m = 60^\circ$). Εφ' όσον θέσουμε την θ_m , μετράμε τη τιμή της περιόδου T_1 με $n=1$ (και με $n=2$, μόνον εάν το ζητήσει ο διδάσκων). Μετά θέτουμε όλες τις τιμές θ_{m_j} και T_1 στον πίνακα 5δ. Ας σημειώσουμε ότι, με T_3^0 , ορίζουμε την περίοδο της μικρότερης γωνίας του πίνακα 5δ ($\theta_m = 3^\circ$).

Πίνακας 5δ: Επίδραση της γωνίας θ_m στην περίοδο T (πρότυπο **ΕΕ**)

A/ A	θ_m	T_1	Λάθος ε_T $= T_1 - T_3^0$	$\varepsilon_T\%$	g	Λάθος ε_g $= g - 9.81$	Λάθος ε_{g3} $= g - g_3^0$
	°	s	s		m/s^2	m/s^2	m/s^2
1	60						
2	55						
3	50						
4	45						
5	40						
6	35						
7	30						
8	25						
9	20						
10	15						
11	10						
12	5						
13	3						

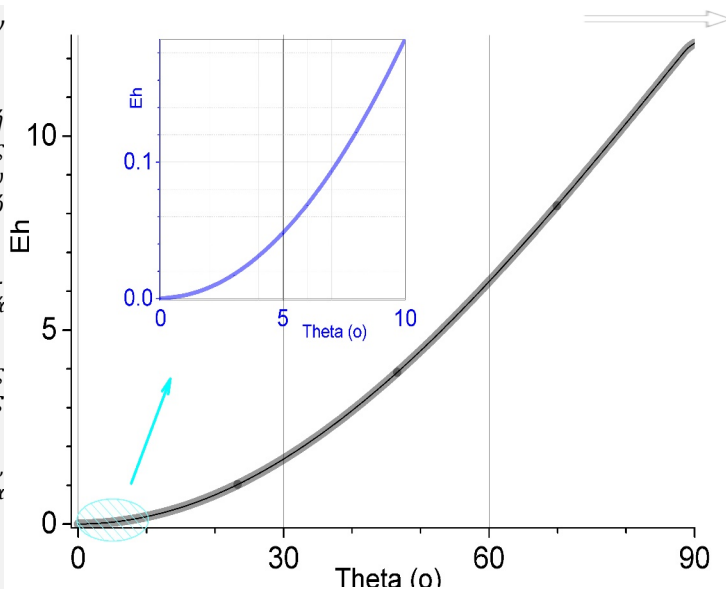
Σχήμα 5δ.2: Ανάλυση λαθών στην περίοδο $T(\theta_m)$.

Δίνεται μία ενδεικτική (θεωρητική προσέγγιση στην) καμπύλη της εξάρτησης των λαθών της περιόδου $\epsilon_T \sim (100/4) \sin^2(\theta_m/2)$ από το αρχικό πλάτος της γωνίας θ_m .

Τα ϵ_T είναι αμελητέα για μικρά πλάτη. Δηλαδή το εκκρεμές είναι ένα «αρκετά ακριβές» ωρολόγιο.

Σ' αυτό στηρίζεται ο λεγόμενος «νόμος του Galileo-Galilei».

Από την "εποχή-Galileo" είχε εφαρμογή, στα ωρολόγια τοίχου (σήμερα, ωρολόγια αντίκες).



Θα ήταν χρήσιμη, πέραν από τη μέτρηση της αρχικής γωνίας θ_m , και η άλλη εναλλακτική περιγραφή του αρχικού πλάτους, μέσω του x_{m0} , που είναι η μέγ. οριζόντια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (σχ. 5δ.1β): πάνω άξονα-Χ2, εάν το ζητήσει ο διδάσκων.

Εργασία για το σπίτι:

- 1) Στο λάθος $\epsilon_T\%$ (στήλη $\epsilon_T\%$) του πίνακα 5δ, να γίνει ένα διάγραμμα $\epsilon_T\%-\theta_m$ για το **ΕΕ**. Αυτό θα είναι παρόμοιο με το θεωρητικό $\epsilon_{T0}\%$ ($\epsilon_{T0}\%-\theta_m$) του **ΑΕ**, που φαίνεται στο σχήμα 5δ.2.
- 2) Στον παρακάτω πίνακα 5δ.2 να αποτυπωθεί συνολικά η επίδραση του λάθους $\epsilon_T\%-\theta_m$.
- 3) Να εκτιμήσετε με τη βοήθεια του πειραματικού $\epsilon_T\% - \theta_m$ διαγράμματός σας (διερεύνηση) το ερώτημα: εάν ισχύει το πρότυπο του **ΑΕ** (ή **ΦΕ**) και σε ποιά περιοχί γωνιών;
- 4) Με τη βοήθεια του πειραματικού σχήματος που θα κάνετε, όπως αυτό του θεωρητικού διαγράμματος στο παραπάνω σχ.5δ.2., να εκτιμήσετε το λάθος ϵ_g στο g με τη γωνία θ_m ($\epsilon_g - \theta_m$).

Πίνακας 5δ.2: Επιλογή 4 μετρήσεων με **μικρή** επίδραση (Γιατί;) του πλάτους θ_m στην περίοδο T (πρότυπο **ΑΕ**)

A/A	A/A Πίνακα 5δ.1	$\theta_m(^{\circ})$	$\epsilon_T\%$	g m/s ²	ϵ_g m/s ²	Σχόλια
1						(Γιατί;)
2						
3						
4						

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΓΦ: [Γενική Φυσική] Θ. Καρακώστας & Δ.Σ. Κυριάκος. Φυσική: Εισαγωγή στη Μηχανική, (1998) Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη

Πίνακας 6: Θέματα πρόσθετων (προαιρετικών) εργασιών με εκκρεμή (για το σπίτι)

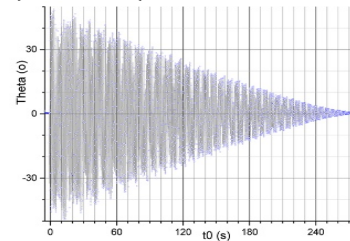
1 Εκκρεμές και στιγμιαίες μετρήσεις. Έστω μετρήσεις $\theta(t)$ της γωνίας θ με το χρόνο t σε αρχεία (ιστότοπος εργαστηρίου). *Να μελετηθούν οι κινήσεις σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.*

Ερωτήματα μελέτης σε ένα αρχείο:
-ποιός είναι ο αριθμός των περιόδων n_π ;
-το μέγιστο πλάτος $\theta_m(t)$ μειώνεται με το n_π ; Κλπ

Συγκριτικά ερωτήματα (μιας παραμέτρου) ανάμεσα στα αρχεία: σε ποιά A έχουμε:

α) το μεγαλύτερο αριθμό περιόδων n_π και γιατί;
β) ταλαντώσεις ΕΕ ως εάν να είματαν στη Σελήνη:

Παράμετρος μέτρησης η συμπληρωματική γωνία $A (=90^\circ - \varphi)$ του κεκλιμένου επιπέδου φ
 $A =: \{0^\circ, 45^\circ, 80^\circ\}$



2 Εκκρεμές και χρονοφωτογράφιση ($f \sim 10\text{fps}$). Σε χρονοφωτογραφίες να γίνουν μετρήσεις $\theta(t)$ της γωνίας με το χρόνο (ιστότοπος εργαστηρίου). *Να μελετηθούν οι κινήσεις σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.*

3 Εκκρεμές και video. Στα αρχεία video (ιστότοπος εργαστηρίου) να γίνουν μετρήσεις θέσης-χρόνου. *Να μελετηθούν οι κινήσεις σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.*

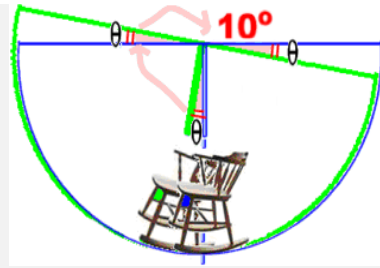
4 Εκκρεμές και παιδιά. *Να μελετηθούν οι κινήσεις παιδικής κούνιας σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.*
Παράμετροι μελέτης: 1) αλλαγή κέντρου βάρους (πρότυπα ΦΕ-ΑΕ) 2) πώς κινεί τα πόδια για να αυξήσει το μέγιστο πλάτος $\theta_m(t)$ με διατήρηση της στροφορμής;
- συχνοτική επίδραση εξωτερικής δύναμης
- επίδραση της φάσης της εξωτερικής δύναμης κλπ



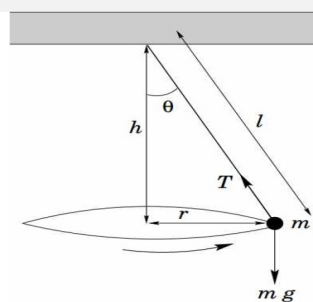
5 Εκκρεμές και διάστημα.
α. Απλό εκκρεμές (ΑΕ) στη Σελήνη.
β. ΑΕ και ΕΕ σε διαστημόπλοιο. *Να μελετηθούν οι κινήσεις μιας επιλογής σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.*

6 Εκκρεμές και καθημερινές εμπειρίες. **Ιδανικό** κάθισμα κούνιας με βάση κυκλική. Το εκκρεμές δεν κρέμεται. Εδώ η τάση του «εικονικού νήματος» αντικαθίσταται από την αντίδραση του δαπέδου. *Να γίνει σύγκριση με το άνετο βάδισμα σε κυλιόμενο διάδρομο γυμναστικής. Να μελετηθεί η κίνηση σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.*

Να μελετηθεί μια παραλλαγή κίνησης κούνιας με
α. παραβολική βάση. β. υπερβολική βάση.



7 Εκκρεμές και μαθηματικά:
α. Εκκρεμές του Kater.
β. Εκκρεμές και ρολόγια τοίχου (αντίκες).
γ. Εκκρεμές και μουσική (μετρονόμος μουσικής κ.λ.π.).
δ. **Κωνικό** εκκρεμές (σχ. 6.7).
ε. Διπλό εκκρεμές, εκκρεμή με ελατήρια κ.λ.π.
Να μελετηθούν οι κινήσεις μιας επιλογής σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα.



Εκκρεμές στο περιβάλλον:
8 Εκκρεμές και βάδισμα (πρότυπο ΦΕ). Βάδισμα του ανθρώπου (αντίστροφο εκκρεμές). *Να μελετηθούν οι κινήσεις σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα μία από τις περιπτώσεις: Βάδισμα*

άνετο, αργό, γρήγορο,
σε κυλιόμενο διάδρομο (γυμναστικής, αεροδρομίων κ.α.),
σε κυλιόμενες σκάλες.

9 Βάδισμα των τετράποδων. Παρόμοια κίνηση (με αυτή των δίποδων) εκτελείται και στο βάδισμα των τετράποδων; *Να γίνει διερεύνηση των τρόπων βαδίσματος (άνετο, αργό, γρήγορο) με την ταχύτητα του κέντρου μάζας.*

