

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ
ΓΕΝΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Μηχανική – Ηλεκτρισμός – Θερμότητα – Κυματική

*Ο. Βαλασιάδης, Γ. Δημητρακόπουλος, Χ. Δημητριάδης, Δ. Ευαγγελινός,
Ε. Παλούρα, Χ. Πολάτογλου, Ι. Σαμαράς, Ε. Χατζηκρανιώτης, Κ. Χρυσάφης*

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2012

Ο. ΒΑΛΑΣΙΑΔΗΣ, Γ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Χ. ΔΗΜΗΤΡΙΑΔΗΣ,
Δ. ΕΥΑΓΓΕΛΙΝΟΣ, Ε. ΠΑΛΟΥΡΑ, Χ. ΠΟΛΑΤΟΓΛΟΥ, Ι. ΣΑΜΑΡΑΣ,
Ε. ΧΑΤΖΗΚΡΑΝΙΩΤΗΣ, Κ. ΧΡΥΣΑΦΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2012

ISBN: XXX-XXX-XXXX-XX-X

Εκδόσεις:  **COPY CITY PUBLISHING**

Κ.Ν. Επισκόπου 7

Θεσσαλονίκη

T. 2310 203 566

www.copycity.gr

Το βιβλίο ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ τυπώθηκε και βιβλιοδετήθηκε από την COPY CITY ΕΠΕ με τεχνολογία φιλική προς το περιβάλλον, σε «πράσινες» ψηφιακές μηχανές, χωρίς χημικά απόβλητα, με μη τοξικά μελάνια, χαμηλής όχλησης και ενεργειακής κατανάλωσης.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος έργου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με οποιονδήποτε τρόπο αναπαραγωγής έργου λόγου ή τέχνης, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν.2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης Βέρνης – Παρισιού, που κυρώθηκε με το ν. 100/1975. Επίσης απαγορεύεται η αναπαραγωγή της στοιχειοθεσίας, σελιδοποίησης, εξωφύλλου και γενικότερα της όλης αισθητικής εμφάνισης του βιβλίου, με φωτοτυπικές, ηλεκτρονικές ή οποιεσδήποτε άλλες μεθόδους, σύμφωνα με το άρθρο 51 του ν. 2121/1993.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό είναι η πρώτη απόπειρα σύνθεσης σε μορφή βιβλίου των παλαιότερων “Σημειώσεων Πειραματικής Μεθοδολογίας και Εφαρμογών της Πειραματικής Φυσικής” οι οποίες γράφτηκαν προς χρήση των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. για το υποχρεωτικό μάθημα “Γενικό Εργαστήριο Φυσικής”.

Από την ίδρυση του Τμήματος Φυσικής, οι πειραματικές ασκήσεις του Εργαστηρίου και οι αντίστοιχες σημειώσεις υπέστησαν πολλές και σημαντικές αλλαγές. Ιδιαίτερο σημείο καμπής αποτέλεσε η εισαγωγή αρχικά δικτύου μικροϋπολογιστών (τύπου BBC) από το 1986-1987 και μετέπειτα δικτύου προσωπικών Η/Υ (PC - συμβατών) για την συγχρονική (online) λήψη μετρήσεων από πειραματικές διατάξεις και την προσομοίωση φαινομένων Φυσικής. Με τον τρόπο αυτό οι εργαστηριακές ασκήσεις εκσυγχρονίστηκαν σημαντικά, γεφυρώνοντας τις διδακτικές και ερευνητικές δραστηριότητες της συγγραφικής ομάδας και παρέχοντας πρόσθετα κίνητρα για μάθηση στους ολοένα και πιο τεχνολογικά ενημερωμένους φοιτητές.

Το βιβλίο χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο αφορά τρία εισαγωγικά εργαστήρια, τα οποία έχουν σαν στόχο την εισαγωγή των φοιτητών σε βασικές έννοιες της μέτρησης και μια πρώτη εισαγωγή στην επεξεργασία πειραματικών δεδομένων και την πειραματική μεθοδολογία. Τα εργαστήρια στο μέρος αυτό συμπεριλαμβάνουν συμμετοχικά πειράματα επίδειξης. Το δεύτερο μέρος αφορά έξι αυτόνομες εργαστηριακές ασκήσεις που προσεγγίζουν φαινόμενα Μηχανικής, Θερμότητας, Ηλεκτρισμού και Κυματικής.

Στο μάθημα του Γενικού Εργαστηρίου Φυσικής οι φοιτητές καλούνται να πάρουν “μια πρώτη γεύση” από την Πειραματική Φυσική, να συνειδητοποιήσουν τους κανόνες του παιχνιδιού σύμφωνα με τους οποίους γεφυρώνεται η Θεωρία με το Πείραμα και να αποκτήσουν τις βάσεις που θα τους είναι απολύτως απαραίτητες στα επόμενα εργαστηριακά μαθήματα των σπουδών τους. Το μάθημα στην ουσία αποτελεί μια “ταχύρρυθμη εκπαίδευση” και έναν “οδηγό επιβίωσης” στον κόσμο της Πειραματικής Φυσικής.

Κλείνοντας το εισαγωγικό αυτό σημείωμα, θέλουμε να ευχαριστήσουμε προσωπικά και εκ μέρους των διδασκόντων του μαθήματος τον (συνταξιούχο πλέον) Αναπληρωτή Καθηγητή Οδυσσέα Βαλασιάδη, Πρόεδρο της Επιτροπής Μαθήματος του Γενικού Εργαστηρίου καθ' όλη την ακαδημαϊκή του σταδιοδρομία, για τις πολύτιμες συζητήσεις και υποδείξεις πάνω στο αντικείμενο και τις οδηγίες των ασκήσεων. Επίσης, θέλουμε να ευχαριστήσουμε θερμά όλα τα σημερινά και παλαιότερα μέλη της Επιτροπής Μαθήματος για τις πολλές διορθώσεις και συνεισφορές, είτε στα κείμενα, είτε στον σχεδιασμό και την ανάπτυξη των ασκήσεων.

Φιλοδοξούμε στις μελλοντικές εκδόσεις να επεκτείνουμε το περιεχόμενο του βιβλίου, και όσον αφορά την Εισαγωγή στην Θεωρία Σφαλμάτων και όσον αφορά τις πειραματικές ασκήσεις, ώστε να καταστεί χρήσιμο και πέρα από τις εξειδικευμένες ανάγκες των πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος Φυσικής του ΑΠΘ.

Οι συγγραφείς

Θεσσαλονίκη 2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. ΜΕΡΟΣ Α: Εισαγωγή στη Θεωρία Σφαλμάτων	7
1. Άσκηση Εφαρμογής Θεωρίας Σφαλμάτων: Βολές σε στόχο	47
2. Άσκηση Εφαρμογής Θεωρίας Ελαχίστων Τετραγώνων: Νόμος του Ohm	63
3. Άσκηση Εφαρμογής Θεωρίας Ελαχίστων Τετραγώνων: Μη γραμμικός αντιστάτης	69
 II. ΜΕΡΟΣ Β: Ασκήσεις	
1. Μέτρηση ταχύτητας – επιτάχυνσης σε ευθύγραμμη τροχιά (Αεροδιάδρομος)	89
2. Μελέτη βολής σφαίρας με χρήση Η/Υ	113
3. Ηλεκτρικά Όργανα – μετατροπές	129
4. Παλμογράφος διπλής δέσμης	155
5. Ψύξη συστήματος σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας και μέτρηση ειδικής θερμότητας	185
6. Μελέτη βασικών χαρακτηριστικών των κυμάτων με διάταξη υπερήχων	221

ΜΕΡΟΣ Α

Εισαγωγή στη Θεωρία Σφαλμάτων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ
--

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συμβολή των εργαστηριακών ασκήσεων στη διαδικασία της μάθησης στις φυσικές επιστήμες είναι καθοριστική, ιδιαίτερα στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Κρίνεται λοιπόν αναγκαίο να διασαφηνισθούν τα καίρια σημεία της λειτουργίας μιας πειραματικής άσκησης. Αυτό θα διευκολύνει στη λογική κατανόηση των οδηγιών εκτέλεσης των ασκήσεων και θα προσφέρει ένα ρυθμό αντιμετώπισης της εφαρμογής τους στην πράξη.

Τα διαδοχικά βήματα τα οποία είναι απαραίτητα να ακολουθήσουμε ώστε να διανύσουμε με επιτυχία την απόσταση ανάμεσα στη θεωρητική προσέγγιση ενός θέματος Φυσικής και την πειραματική του αναπαράσταση είναι τα ακόλουθα:

- i) Καθορίζουμε με σαφήνεια το συγκεκριμένο φαινόμενο της Φυσικής που θέλουμε να μελετήσουμε.
- ii) Σχεδιάζουμε ένα πείραμα του οποίου η πιστότητα εξυπηρετεί το σκοπό μας.
- iii) Επεξεργαζόμαστε τα δεδομένα από τις πειραματικές μετρήσεις.
- iv) Σε διαδοχικά βήματα εντοπίζουμε και αναλύουμε τα συστηματικά σφάλματα που προέρχονται από τη μέθοδο ή τα όργανα που χρησιμοποιούμε.
- v) Αναλύουμε τα αποτελέσματα του πειράματος ώστε να καταλήξουμε σε αιτιολογημένα συμπεράσματα.
- vi) Υπολογίζουμε τη βεβαιότητα με την οποία μπορούμε να αποφανθούμε για το τελικό πειραματικό αποτέλεσμα.
- vii) Καταγράφουμε τη μέθοδο, τις μετρήσεις και τους υπολογισμούς, με τρόπο που ο κάθε μελλοντικός αναγνώστης τους να μπορεί να σχηματίσει σαφή και δεδομένης ακρίβειας εικόνα για το τί βρήκαμε, με ποιό τρόπο και ποιά τα περιθώρια αξιοπιστίας γι' αυτό.

Από την παραπάνω ήδη ανάλυση είναι φανερό πως χρειάζεται να έχουμε σαφή αντίληψη για ορισμένες βασικές έννοιες όπως το πείραμα, τη μέτρηση, το σφάλμα, κλπ. ώστε να αντιμετωπίσουμε τις εργαστηριακές ασκήσεις κατά το δυνατόν χωρίς

ασάφειες. Η ανάλυση λοιπόν αυτών των βασικών προκαταρκτικών εννοιών αποτελεί το πρώτο αντικείμενο μελέτης και θα χρειαστεί ιδιαίτερη προσοχή για να τις αναγνωρίσουμε στην πράξη μέσα από απλά πειράματα, που τις συνοδεύουν.

B. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Φαινόμενο: Κάθε τι που μπορεί να γίνει αντικείμενο συστηματικής εμπειρίας, δηλ. κάθε γεγονός ή διαδικασία που συμβαίνει σε δεδομένο χώρο και χρόνο.

Πείραμα: Η ελεγχόμενη, μεθοδική και επαναλήψιμη αναπαράσταση ενός φαινομένου μέσα στον ελεγχόμενο περιβάλλον του εργαστηρίου (ή και έξω από αυτό).

Φυσικά μεγέθη (μεταβλητές, παράμετροι): Σ' ένα φαινόμενο, τα φυσικά μεγέθη που μπορούν να το περιγράψουν είναι δυνατό να παίρνουν διάφορες τιμές, οπότε καλούνται *μεταβλητές*, ή τιμή τους παραμένει σταθερή, οπότε καλούνται *παράμετροι*. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε μόνο στις μεταβλητές (που είναι το συνηθέστερο).

Μέτρηση φυσικού μεγέθους: Μέτρηση ενός μεγέθους είναι η διαδικασία με την οποία ένα φυσικό μέγεθος συγκρίνεται με την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Η διαδικασία αυτή απαιτεί την χρήση ενός *οργάνου μέτρησης*.

Ποιοτική αντίληψη φαινομένου: Είναι η αναγνώριση των φυσικών μεγεθών που απαιτούνται ώστε να περιγράψουν το φαινόμενο.

Ποσοτική αντίληψη φαινομένου: Είναι η μέτρηση των μεγεθών που το περιγράφουν και ο προσδιορισμός της νομοτέλειας του φαινομένου (δηλ. της μαθηματικής σχέσης που εκφράζει την αλληλεξάρτηση των φυσικών μεγεθών).

Όπως είναι φανερό, η ποιοτική μελέτη του φαινομένου είναι μάλλον επιφανειακή, ενώ η ποσοτική είναι πιο θεμελιωμένη. Αυτή απαιτεί:

- α) Ποιοτική αντίληψη του φαινομένου.
- β) Καθορισμό της αρχής των μετρήσεων κάθε φυσικού μεγέθους
- γ) Καθορισμό των μονάδων μέτρησης και σύγκρισή τους με το μέγεθος των αντιστοίχων μεταβλητών.
- δ) Καταχώρηση και επεξεργασία των μετρήσεων
- ε) Προσδιορισμό της νομοτέλειας του φαινομένου.

Όργανο μέτρησης: Είναι κάθε συσκευή, εργαλείο ή διάταξη, η οποία έχει την δυνατότητα να κάνει σύγκριση με την μονάδα μέτρησης και να παρέχει σε έναν παρατηρητή ένα αριθμητικό αποτέλεσμα, δηλαδή μια αναγνώσιμη και αναγνωρίσιμη ένδειξη. Πάρα πολλές συσκευές της καθημερινής μας ζωής μπορεί να θεωρηθούν ότι αποτελούν (έστω και χονδρικά) όργανα μέτρησης. Σαν παραδείγματα μπορείτε να θεωρήσετε τους χάρακες, τις μετροταινίες, τα θερμόμετρα, τα ρολόγια (χεριού και τοίχου) ή ακόμα και το κινητό σας τηλέφωνο, το οποίο διαθέτει χρονόμετρο.

Τα όργανα μέτρησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν με άμεση ανάγνωση, αλλά και να συνδεθούν με μια αυτοματοποιημένη διάταξη που περιλαμβάνει έναν Η/Υ. Στην περίπτωση που ο παρατηρητής κάνει την ανάγνωση της ένδειξης, είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα πρέπει να είναι ένα φυσικό μέγεθος παρατηρήσιμο δια γυμνού οφθαλμού. Το μάτι μπορεί να διακρίνει δύο βασικά φυσικά μεγέθη: το μήκος και την γωνία. Για παράδειγμα, ένα υδραργυρικό θερμόμετρο εκμεταλλεύεται την θερμομετρική ιδιότητα της θερμικής διαστολής του όγκου και μετατρέπει ένα αόρατο φυσικό μέγεθος (την θερμοκρασία) σε ένα ορατό, το μήκος της στήλης του υδραργύρου πάνω σε μια αυθαίρετη κλίμακα. Κατ' αναλογία, το στροφόμετρο ενός αυτοκινήτου μετατρέπει την συχνότητα περιστροφής του κινητήρα σε μια γωνία, η οποία είναι αναγνώσιμη επάνω σε μια αυθαίρετη κυκλική κλίμακα. Τα δύο αυτά παραδείγματα αφορούν τα λεγόμενα **αναλογικά** όργανα μέτρησης, τα οποία διαθέτουν μια ευθύγραμμη ή κυκλική κλίμακα, επάνω στην οποία κινείται ένας δείκτης. Τα λεγόμενα ψηφιακά όργανα μέτρησης δίνουν απευθείας ένα αριθμητικό αποτέλεσμα και είναι πιο χρηστικά.

Τα δύο βασικότερα χαρακτηριστικά των οργάνων μέτρησης που ενδιαφέρουν στο εργαστήριο είναι η **ακρίβεια** και η **πιστότητα**.

Η **ακρίβεια** ενός οργάνου μέτρησης (precision) αποτελεί ένα μέτρο την λεπτομέρειας στα αριθμητικά αποτελέσματα την οποία επιτρέπει το όργανο. Ένα όργανο μεγάλης ακρίβειας δίνει περισσότερα ψηφία στην μέτρηση από ό,τι ένα όργανο μικρής ακρίβειας. Για παράδειγμα, η μετροταινία του μηχανικού επιτρέπει μετρήσεις με ακρίβεια εκατοστού (cm), ενώ ένας συνηθισμένος πλαστικός χάρακας επιτρέπει μέτρηση με ακρίβεια χιλιοστού του μέτρου (mm). Οι μετρήσεις από το πρώτο όργανο θα μοιάζουν με 2.35 m, 4.78 m κλπ, ενώ οι μετρήσεις του δεύτερου θα έχουν την μορφή 10.2 cm ή 29.7 cm (αντίστοιχα 0.102 m και 0.297 m). Η ακρίβεια ενός οργάνου μέτρησης εξαρτάται αποκλειστικά από την τεχνολογία απεικόνισης των

μετρήσεων, δηλαδή την λεπτομέρεια που παρέχεται κατά στην ανάγνωση της κλίμακας ή το πλήθος των ψηφίων που παρέχει το ψηφιακό όργανο.

Το πλήθος των ψηφίων όμως δεν μας εξασφαλίζει ότι οι μετρήσεις είναι σύμφωνες με την πρότυπη μονάδα μέτρησης, που είναι το standard μέτρο, το οποίο ορίζεται στο σύστημα μονάδων SI σαν το διάστημα το οποίο διανύει το φως σε χρονική διάρκεια ίση με το $1/299,792,458$ του δευτερολέπτου. Το χαρακτηριστικό του οργάνου μέτρησης το οποίο περιγράφει τον βαθμό συμφωνίας των μετρήσεων που παράγει με την πρότυπη μονάδα μέτρησης είναι η **πιστότητα** του οργάνου, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από τον κατασκευαστή του οργάνου και ενδεχομένως από άλλα χαρακτηριστικά όπως η παλαιότητα, η κακή χρήση ή ελλιπής συντήρηση κλπ. Παρατηρώντας ένα συνηθισμένο όργανο μέτρησης, πχ. έναν χάρακα στο χαρτοπωλείο ή ένα χρονόμετρο στα καταστήματα, δεν έχουμε συνήθως κανένα στοιχείο που να μας υποδεικνύει πόση είναι η πιστότητα που επιτρέπουν. Μόνο για τα όργανα που χρησιμοποιούνται στην έρευνα ή σε βιομηχανικές ή νοσοκομειακές εφαρμογές δίνουν οι κατασκευαστές τα χαρακτηριστικά πιστότητας. Τα περισσότερα όργανα που χρησιμοποιούμε στο Γενικό Εργαστήριο επίσης δεν παρέχουν σχετικές πληροφορίες. Συνεπώς, οι ενδείξεις από αυτά τα όργανα είναι κυριολεκτικά “ενδείξεις”, δηλαδή στην καλύτερη περίπτωση πληροφορίες προς την σωστή κατεύθυνση, αλλά λιγότερο ή περισσότερο αξιόπιστες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε μέτρηση από ένα άγνωστο σε μας ή ατεκμηρίωτο όργανο μέτρηση είναι εξ ορισμού άγνωστης πιστότητας, και ενδεχομένως άχρηστη ή και επικίνδυνη. Συνεπώς, παρ’ όλη την επιφανειακή σοβαρότητα εμφάνισης, πρέπει πάντοτε να διατηρούμε επιφυλάξεις σχετικά με την πιστότητα των μετρήσεων που παρέχουν τα όργανα μέτρησης.

Η ακρίβεια και η πιστότητα των οργάνων μέτρησης είναι ανεξάρτητες μεταβλητές. Με άλλα λόγια, το πλήθος των ψηφίων που παρέχει στις μετρήσεις του ένα όργανο, δεν εξασφαλίζει ότι οι μετρήσεις αυτές θα είναι συμβατές με την αντίστοιχη πρότυπη μονάδα μέτρησης. Για παράδειγμα, ένα ηλεκτρονικό χρονόμετρο χειρός θεωρείται όργανο υψηλής ακρίβειας, επειδή παρέχει ενδείξεις χρόνου με χιλιοστά του δευτερολέπτου. Αντίθετα, ένα μηχανικό ρολόι χειρός ή τοίχου θεωρείται (και είναι) όργανο μικρής ακρίβειας, επειδή μπορεί να δώσει μετρήσεις με ακρίβεια δευτερολέπτου. Είναι όμως δυνατό το ρολόι τοίχου (με την μικρή ακρίβεια) να έχει μεγαλύτερη πιστότητα από το ηλεκτρονικό χρονόμετρο (που έχει μεγάλη ακρίβεια); Η

απάντηση είναι ναι, εάν το πρώτο “χάνει” για παράδειγμα δύο δευτερόλεπτα το μήνα, ενώ το δεύτερο χάνει δέκα δευτερόλεπτα το μήνα (πράγμα το οποίο δεν είναι καθόλου απίθανο να συμβεί).

Για να δώσουμε ένα δεύτερο παράδειγμα, στο εργαστήριο διαθέτουμε δύο ειδών συνηθισμένους πλαστικούς χάρακες από διαφορετικούς κατασκευαστές, μήκους 30 εκατοστών. Παρόλο που και οι δύο είναι βαθμολογημένοι σε χιλιοστά, και συνεπώς παρέχουν την ίδια ακρίβεια στις μετρήσεις, αν τους τοποθετήσουμε πλάτη με πλάτη, ώστε να συμπέσει η αρχή των μετρήσεων, θα διαπιστώσουμε ότι στο άλλο άκρο οι δύο κλίμακες διαφέρουν κατά ένα ολόκληρο χιλιοστό. Το αποτέλεσμα είναι οι δύο χάρακες για το ίδιο αντικείμενο να δίνουν δύο διαφορετικές τιμές. Συνεπώς οι δύο χάρακες έχουν διαφορετική πιστότητα. Αν δεν διαθέτουμε όμως έναν τρόπο σύγκρισης με το πρότυπο μέτρο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε ποιος από τους δύο χάρακες έχει μεγαλύτερη πιστότητα. Συνεπώς δεν μπορούμε να εμπιστευτούμε τις ενδείξεις ούτε του ενός ούτε του άλλου χάρακα.

Στην καθημερινή ζωή η έννοια της ακρίβειας οργάνου μέτρησης χρησιμοποιείται ευρέως, και συνήθως έχει τρεις σημασίες, ανάλογα με το περιβάλλον και τις συνθήκες χρήσης. Η “ακρίβεια” άλλοτε εννοείται με την σημασία του ορισμού που δώσαμε στο εργαστήριο, άλλοτε χρησιμοποιείται σαν συνώνυμη με την έννοια της πιστότητας και συχνά συγχέεται με την ικανότητα μέτρησης μικρών φυσικών ποσοτήτων (π.χ. στην περίπτωση της ζυγαριάς ακριβείας που έχει την ικανότητα μέτρησης μαζών της τάξης του mg). Στο περιβάλλον του εργαστηρίου φυσικής πρέπει να διακρίνετε τις τρεις αυτές καθημερινές σημασίες της λέξης και να μην τις συγχέετε.

Υπάρχουν και πολλά άλλα χαρακτηριστικά των οργάνων μέτρησης, όπως η διακριτική ικανότητα, η μέγιστη και η ελάχιστη περιοχή μέτρησης, η επαναληπτικότητα, η ολίσθηση, μερικά από τα οποία θα περιγραφούν στις αυτόνομες ασκήσεις.

Συνθήκες μέτρησης φυσικών μεγεθών: Όπως είδαμε παραπάνω, η ποσοτική μελέτη προϋποθέτει μετρήσεις των φυσικών μεγεθών που περιγράφουν ένα φαινόμενο. Παράδειγμα: Θέλουμε να μετρήσουμε τον χρόνο πτώσης ενός σώματος από αρχικό ύψος 10.0 m με ένα ψηφιακό χρονόμετρο. Η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις γνωστές εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα. Συνεπώς, ο χρόνος αυτός θεωρητικά *οφείλει* να είναι ο ίδιος κάθε φορά που πραγματοποιούμε το πείραμα, αλλιώς καταρρίπτεται η

ισχύς των νόμων της κινηματικής. Οι μετρήσεις δηλαδή του ιδίου φαινομένου ή ο προσδιορισμός μιας φυσικής σταθεράς οφείλουν να έχουν επαναληψιμότητα.

Σχεδόν σε κάθε μέτρηση όμως, παρατηρούμε ότι υπάρχει *διασπορά* των πειραματικών μετρήσεων, δηλαδή οι πειραματικές τιμές διαφέρουν μεταξύ τους. Και μάλιστα, όσο καλύτερης ποιότητας όργανα χρησιμοποιούμε, τόσο πιο εμφανής είναι η πειραματική διασπορά. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αν χρησιμοποιούμε ένα χρονόμετρο με διακριτική ικανότητα 1 sec (ρολόι χεριού με δείκτες), κάθε φορά που αφήνουμε το σώμα να πέσει, το πιθανότερο είναι να βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε ένα χρονόμετρο με διακριτική ικανότητα 0.01 sec (ψηφιακό χρονόμετρο), το πιθανότερο είναι κάθε φορά που εκτελούμε το πείραμα να βρίσκουμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Η διασπορά των μετρήσεων βέβαια δεν οφείλεται σε αλλαγή των νόμων της φυσικής από μέτρηση σε μέτρηση, αλλά στο ότι παρεμβαίνουν διάφοροι παράγοντες, όπως π.χ. οι ατέλειες των οργάνων, η αδεξιότητα του παρατηρητή, η θερμοκρασία, η πίεση, ανεπιθύμητα μεγέθη ή πεδία (βαρυτικό, ηλεκτρικό, μαγνητικό, κ.λπ.) που επηρεάζουν την μέτρηση και εισάγουν στην μέτρηση τα λεγόμενα *σφάλματα μέτρησης*. Τα σφάλματα μέτρησης επηρεάζουν την *επαναληψιμότητα των μετρήσεων* με αποτέλεσμα φυσικά να εμφανίζεται μια ασάφεια σ' αυτές.

Αποτέλεσμα μέτρησης: Λόγω της μη επαναληψιμότητας των μετρήσεων, είμαστε αναγκασμένοι να αναφέρουμε ως αποτέλεσμα της μέτρησης όχι ένα συγκεκριμένο αριθμητικό αποτέλεσμα (π.χ. την μέση τιμή των μετρήσεων), αλλά μια *περιοχή τιμών*, μέσα στην οποία ο παρατηρητής κρίνει ότι βρίσκεται το πειραματικό αποτέλεσμα. Είναι εύλογο ότι όσο καλύτερη επαναληψιμότητα έχει η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, τόσο πιο στενή θα είναι αυτή η περιοχή τιμών. Στις επόμενες παραγράφους θα περιγράψουμε τον κοινά αποδεκτό τρόπο έκφρασης των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Αξιοπιστία αποτελέσματος: Το γεγονός ότι ο κανόνας στην πειραματική φυσική είναι οι μετρήσεις μας να έχουν διασπορά, προκαλεί μια ασάφεια στο αποτέλεσμα κάθε μέτρησης. Το ποσοστό της ασάφειας (σε σχέση προς την τιμή του μετρούμενου μεγέθους) που θεωρούμε αποδεκτό στα αποτελέσματά μας είναι αυτό που καθορίζει και τα όρια αξιοπιστίας τους για πιθανή χρήση. Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι στην πειραματική φυσική δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν

δύο πειραματικά αποτελέσματα διαφέρουν μεταξύ τους αν δεν υπάρχουν διαθέσιμα στοιχεία για τα πειραματικά σφάλματα.

Από τα παραπάνω, προκύπτει έντονα η αναγκαιότητα καθορισμού της αξιοπιστίας ενός αποτελέσματος με έναν *τυποποιημένο* (δηλ. συμφωνημένο στην πειραματικές επιστήμες) τρόπο εκτίμησης του σφάλματος, αφού σε αντίθετη περίπτωση μπορούμε να πούμε πως το πείραμα δεν έχει δώσει οριστικό αποτέλεσμα. Για το λόγο, αυτό στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε με τη λεγόμενη *Θεωρία Σφαλμάτων*, παραθέτοντας τις βασικές αρχές της.

Γ. ΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, κατά τη διαδικασία κάθε φυσικής μέτρησης είναι δυνατόν να παρέμβουν διάφοροι παράγοντες, οι οποίοι μεταβάλλουν την επαναληψιμότητα των μετρήσεων. Αν δεν υπήρχαν οι παράγοντες αυτοί, η πειραματική τιμή μιας συγκεκριμένης αλλά άγνωστης ποσότητας, κάθε φορά που θα προσπαθούσαμε να την προσδιορίσουμε, θα προέκυπτε σαν μια μοναδική τιμή X , η ίδια πάντα, την οποία σε μια πρώτη επιφανειακή θεώρηση θα την θεωρούσαμε σαν την ‘πραγματική’ τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Στην πράξη όμως, η τιμή που μετράμε είναι κάποια τιμή x , που προσεγγίζει απλώς την ‘πραγματική’, χωρίς να συμπίπτει απαραίτητα μ’ αυτήν. Η διαφορά

$$x - X = \varepsilon$$

παραδοσιακά ονομάζεται *σφάλμα της μέτρησης* και έχει θετική ή αρνητική τιμή.

Πρέπει εξ αρχής να τονιστεί ότι σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μέτρησης η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους είναι άγνωστη, και συνεπώς το σφάλμα μέτρησης είναι και αυτό άγνωστο. Μόνο αν μετράμε μια φυσική ποσότητα η οποία είναι με σαφήνεια γνωστή εκ των προτέρων, όπως π.χ. η πυκνότητα του απεσταγμένου νερού ή η ταχύτητα του φωτός στο κενό, τότε μπορούμε να αποφανθούμε οριστικά για το αν η μέτρησή μας είναι εσφαλμένη ή όχι. Στην γενική όμως περίπτωση, όταν μετράμε στο εργαστήριο ένα άγνωστο φυσικό μέγεθος, όπως π.χ. την ωμική αντίσταση ενός αγωγού, δεν γνωρίζουμε την πραγματική τιμή, και συνεπώς δεν γνωρίζουμε επακριβώς το σφάλμα της μέτρησης. Για το λόγο αυτό, κάθε αποτέλεσμα μέτρησης αποτελείται από δύο μέρη: την βέλτιστη εκτίμηση του φυσικού μεγέθους, συνοδευόμενη από μια εκτίμηση του πειραματικού σφάλματος. Και τα δύο αυτά μέρη

υπολογίζονται με βάση συγκεκριμένους κανόνες, τους οποίους θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους.

Επειδή η λέξη ‘σφάλμα’ (στα αγγλικά measurement error) έχει τον χαρακτήρα του ‘λάθους’ στην καθημερινή γλώσσα, έννοια που υπονοεί ότι είναι βέβαιο ότι το αποτέλεσμα είναι λανθασμένο, στην πειραματική φυσική από το 1985 περίπου προτιμάται να χρησιμοποιείται η έννοια της *αβεβαιότητας μέτρησης* (measurement uncertainty). Στα πλαίσια όμως μιας πρώτης εισαγωγής στην Θεωρία Σφαλμάτων για τις ανάγκες του Γενικού Εργαστηρίου Φυσικής, χρησιμοποιούμε τους δύο όρους σαν συνώνυμους.

Τα σφάλματα, δηλαδή οι αποκλίσεις των μετρήσεων από την πραγματική τιμή, ιστορικά έχει καθιερωθεί να κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες, στα **συστηματικά** και στα **τυχαία**, ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζουν τις πειραματικές μετρήσεις.

Συστηματικά σφάλματα. Τα συστηματικά σφάλματα είναι εκείνα που όταν παρουσιάζονται σε μια ομάδα μετρήσεων, η τιμή τους παραμένει κατά κανόνα σταθερή από μέτρηση σε μέτρηση και προκαλούν συστηματική μεταβολή (αύξηση ή μείωση) στο τελικό αποτέλεσμα της μέτρησης. Τα συστηματικά σφάλματα, όταν τα γνωρίζουμε, μπορούμε με μια κατάλληλη διόρθωση των μετρήσεων να τα απαλείψουμε.

Τυχαία σφάλματα. Τα τυχαία σφάλματα αντίθετα, είναι εκείνα που προκαλούν εμφανή *διασπορά* στα αποτελέσματα των μετρήσεων, η οποία όμως δεν έχει συστηματικό χαρακτήρα. Δηλαδή προκαλούν κάθε φορά είτε αύξηση είτε μείωση στο τελικό αποτέλεσμα της μέτρησης με τυχαίο τρόπο και με διαφορετική απόλυτη τιμή σφάλματος σε κάθε επιμέρους μέτρηση.

Στη συνέχεια θα αναφερθούν σε συντομία οι συνήθεις πηγές σφαλμάτων και οι βασικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε στο εισαγωγικό πλαίσιο των αναγκών του Γενικού Εργαστηρίου Φυσικής.

1. Συστηματικά σφάλματα. Αυτά οφείλονται:

- α) *Σε κατασκευαστικές ατέλειες των οργάνων μέτρησης.* Παράδειγμα: Όταν μετράμε το μήκος ενός αντικειμένου με έναν χάρακα του 1 m, του οποίου οι 100 υποδιαιρέσεις αντιστοιχούν στην πραγματικότητα σε 99 cm, και δεν γνωρίζουμε ή δεν πάρουμε

υπόψη αυτή τη διαφορά, τότε οι μετρήσεις μας θα επιβαρυνθούν με συστηματικό σφάλμα, διότι *κάθε μέτρηση* με τον ελαττωματικό αυτό χάρακα θα είναι μεγαλύτερη από την πραγματική. Μάλιστα, το σφάλμα αυτό δεν θα είναι σταθερό, αλλά θα εξαρτάται αναλογικά από το μήκος του μετρούμενου αντικειμένου. Ο μόνος τρόπος να αποφύγουμε αυτό το σφάλμα είναι ο προηγούμενος έλεγχος του οργάνου μέτρησης, δηλαδή η σύγκρισή του με ένα όργανο αναφοράς (το οποίο δεν έχει κατασκευαστικές ατέλειες). Μετά από την σύγκριση αυτή, είναι δυνατό να κάνουμε κατάλληλες διορθώσεις και να εξαλείψουμε το συστηματικό σφάλμα, στην περίπτωση μας πολλαπλασιάζοντας κάθε μέτρηση με τον παράγοντα 100/99. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι επανειλημμένες μετρήσεις με τα ίδια όργανα ή την ίδια πειραματική διάταξη, ούτε αποκαλύπτουν ούτε εξουδετερώνουν ένα συστηματικό σφάλμα. Για το λόγο αυτό επιβάλλεται ο συχνός έλεγχος των οργάνων μέτρησης, και συγκεκριμένα η *διακρίβωσή* τους, δηλαδή η επαλήθευση των μετρήσεων που μας δίνουν όταν μετράμε ένα πρότυπο φυσικό μέγεθος ή η σύγκρισή τους με ένα άλλο όργανο μέτρησης που έχει γνωστή και πιστοποιημένη αξιοπιστία.

- β) *Στη μέθοδο μέτρησης.* Τα σφάλματα αυτά ανακαλύπτονται δύσκολα και εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες, όπως:
- i) Από την τάξη μεγέθους του μετρούμενου μεγέθους. Παράδειγμα: Η μέτρηση μιας μεγάλης σχετικά ηλεκτρικής αντίστασης, π.χ. 1 KΩ, μπορεί να γίνει εύκολα και αξιόπιστα με χρήση βολτομέτρου και αμπερομέτρου ή ψηφιακού πολυμέτρου, γιατί η επίδραση στην μέτρηση των εσωτερικών αντιστάσεων των οργάνων και των αντιστάσεων των αγωγών σύνδεσης είναι αμελητέα. Αν όμως θέλουμε να μετρήσουμε είτε μια πολύ μικρή είτε μια πολύ μεγάλη αντίσταση (π.χ. 1 mΩ ή 100 GΩ αντίστοιχα), τότε πρέπει να αναζητήσουμε διαφορετική μέθοδο μέτρησης.
 - ii) Από τη φύση του μετρούμενου φυσικού μεγέθους. Παράδειγμα: Για τη μέτρηση της ειδικής θερμότητας στερεών και υγρών, αν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των μιγμάτων και τη μέθοδο της ψύξης, η πρώτη είναι καταλληλότερη για τα στερεά και η δεύτερη για τα υγρά.
 - iii) Από την πιστότητα που απαιτείται από τις μετρήσεις μας. Παράδειγμα: Αν χρειάζεται να προσδιορίσουμε πειραματικά ένα φυσικό μέγεθος με σφάλμα της

τάξης του 5%, αυτό μπορεί να γίνει με χρήση απλών οργάνων και συνηθισμένων μεθόδων μέτρησης. Αν όμως χρειαστεί να συγκρίνουμε δύο πειραματικές τιμές του ίδιου φυσικού μεγέθους, για να αποφασίσουμε αν διαφέρουν μεταξύ τους λιγότερο από 1%, θα πρέπει να βρούμε μια διαφορετική μέθοδο μέτρησης, η οποία να προκαλεί πολύ μικρότερα σφάλματα.

- γ) Σε εξωτερικά αίτια, δηλαδή παραμέτρους του φυσικού περιβάλλοντος και παράγοντες που επηρεάζουν την μέτρηση και παραμένουν περίπου σταθερά. Με “εξωτερικούς” παράγοντες εννοούμε φυσικά μεγέθη (είτε ίδιας φύσης είτε διαφορετικά από αυτά που θέλουμε να μετρήσουμε), τα οποία όμως μεταβάλλουν τα χαρακτηριστικά είτε των οργάνων μέτρησης είτε το ίδιο το παρατηρούμενο φαινόμενο. Για παράδειγμα, όταν μελετώνται οι φυσικές ιδιότητες υλικών, πρέπει να ληφθεί υπόψη το υψόμετρο στο οποίο διεξάγεται η μέτρηση, γιατί είναι γνωστό ότι π.χ. τα σημεία τήξης και βρασμού εξαρτώνται από την ατμοσφαιρική πίεση. Στην περίπτωση αυτή, μιλάμε για έναν *τροποποιητικό* παράγοντα επειδή η πίεση είναι ένα μέγεθος διαφορετικό από την θερμοκρασία (τήξης ή βρασμού) την οποία επιθυμούμε να προσδιορίσουμε. Κατά τον προσδιορισμό της ηλεκτρικής αντίστασης ενός υλικού, η αντίσταση των αγωγών σύνδεσης, επειδή είναι ομοειδές με το μετρούμενο μέγεθος συνιστά έναν *παρεμβαλλόμενο* παράγοντα. Συνήθως, πολλές από τις λεγόμενες “συνθήκες περιβάλλοντος” του εργαστηρίου, όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, η πίεση, τα διάφορα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που υπάρχουν στον χώρο κλπ. είναι δυνατόν να επηρεάσουν τις μετρήσεις μας προκαλώντας συστηματικά σφάλματα, τα οποία πρέπει να τα λαμβάνουμε υπόψη και να κάνουμε τις ανάλογες διορθώσεις στα πειραματικά αποτελέσματα.
- δ) Στον παρατηρητή. Στις πιο πολλές περιπτώσεις, οι μετρήσεις απαιτούν την παρέμβαση ενός παρατηρητή, ο οποίος καθορίζει και συνεπώς επηρεάζει την διαδικασία μέτρησης. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η μέτρηση του μήκους ενός αντικειμένου με ένα παχύ πλαστικό χάρακα ή η ανάγνωση ενός αναλογικού οργάνου μέτρησης (όργανο με κινούμενο δείκτη επάνω σε διαβαθμισμένη κλίμακα). Ανάλογα με την γωνία υπό την οποία ένας μη εξασκημένος παρατηρητής παρατηρεί την κλίμακα, το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι διαφορετικό. Υποθέτοντας ότι ο παρατηρητής κάνει κάθε μέτρηση κοιτάζοντας το όργανο μέτρησης υπό την ίδια περίπου γωνία, συμπεραίνουμε ότι οι μετρήσεις του θα είναι συστηματικά είτε μεγαλύτερες είτε μικρότερες από αυτές που θα προέκυπταν αν ο

παρατηρητής έκανε την ενδεδειγμένη ανάγνωση της κλίμακας, δηλαδή παρατηρώντας τις ενδείξεις *κάθετα* προς το επίπεδο της κλίμακας. Το σφάλμα αυτό που κάνει ο μη εξασκημένος παρατηρητής ονομάζεται *σφάλμα ανάγνωσης* της κλίμακας και οφείλεται στο γεωμετρικό φαινόμενο της *παράλλαξης*. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα σφάλματα που οφείλονται στον παρατηρητή δεν είναι πάντοτε συστηματικά. Ένα παραστατικό παράδειγμα είναι χρήση μηχανικού ή ηλεκτρονικού χρονομέτρου για την μέτρηση της διάρκειας ενός φαινομένου, όπου η αρχή και το τέλος ενός φαινομένου σημειώνονται από τον παρατηρητή με συμπίεση ενός κουμπιού του χρονομέτρου. Παρόλο που ο παρατηρητής, ανάλογα με την ταχύτητα αντίδρασής του και την επιδεξιότητά του, αναμένεται να πατάει το κουμπί *συστηματικά αργότερα* από την έναρξη ή λήξη του φαινομένου, η διάρκεια του φαινομένου, επειδή ισούται με την διαφορά των δύο μετρήσεων, ενδέχεται να μην επηρεάζεται από την ταχύτητα αντίδρασης του παρατηρητή και να έχει *τυχαίο χαρακτήρα*. Επίσης στον παρατηρητή πρέπει να αποδοθούν και τα λεγόμενα χονδροειδή σφάλματα ή αβλεψίες, όταν για παράδειγμα κάνει λάθη στην καταγραφή των μετρήσεων, π.χ. σημειώνει μέτρηση 38.2 αντί για 83.2. Τα σφάλματα αυτά δεν έχουν απαραίτητα συστηματικό χαρακτήρα.

Όσον αφορά τώρα τα τυχαία σφάλματα, υπάρχει στη διάθεσή μας η κατάλληλη θεωρία για τον προσδιορισμό τους. Τα τυχαία σφάλματα μπορούν να ανιχνευθούν μόνο εφόσον επαναλάβουμε τις μετρήσεις μας. Επιπλέον, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, αυξάνοντας το πλήθος των μετρήσεων, ο μέσος όρος τους μας δίνει μια τιμή που πλησιάζει όλο και περισσότερο στην πραγματική τιμή. Αυτά δεν ισχύουν για τα συστηματικά σφάλματα.

2) Τυχαία σφάλματα. Αυτά οφείλονται:

- α) *Στην περιορισμένη ευαισθησία των οργάνων μέτρησης. Παράδειγμα:* Για την μέτρηση της έντασης του ρεύματος σε ένα κύκλωμα χρησιμοποιούμε ένα ψηφιακό αμπερόμετρο διακριτικής ικανότητας 0.01 Α. Όπως κάθε ψηφιακό όργανο μέτρησης, το αμπερόμετρο παρέχει ενδείξεις με συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων στρογγυλεύοντας την τιμή του ρεύματος ανάλογα με το επόμενης τάξης ψηφίο, είτε προς τα πάνω (όταν το τρίτο δεκαδικό ψηφίο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5), είτε προς τα κάτω (όταν το τρίτο δεκαδικό ψηφίο είναι μικρότερο του 5). Αν τώρα το μετρούμενο ρεύμα είναι $I = 0.22 \text{ A}$ και στο κύκλωμά μας συμβαίνουν τυχαίες

μεταβολές της έντασης λόγω θορύβου ή παρεμβολών μικρότερων από 0.01 A, αυτές θα προκαλούν μια αυξομείωση της ένδειξής του κατά ± 0.01 A με *τυχαίο χαρακτήρα*, δηλαδή θα βλέπουμε την ένδειξη του αμπερομέτρου να μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο μεταξύ των ενδείξεων 0.21, 0.22 και 0.23. Συνεπώς, ο ενδεδειγμένος τρόπος για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι να γράψουμε $I = 0.22 \pm 0.01$ A.

- β) *Στον παρατηρητή.* Ο παρατηρητής, όπως είναι φυσικό, επηρεάζεται από διάφορους αστάθμητους (“τυχαίους” στην καθημερινή γλώσσα) παράγοντες, είτε εξωτερικούς (π.χ. αποπροσανατολιστικά ερεθίσματα) είτε εσωτερικούς (π.χ. κόπωση), με αποτέλεσμα οι μετρήσεις του για το ίδιο μετρούμενο μέγεθος να διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Παράδειγμα: Το ίδιο συστηματικό σφάλμα παράλλαξης που περιγράψαμε παραπάνω στην παράγραφο 1.δ, μπορεί να γίνει τυχαίο, αν ο παρατηρητής κάθε φορά βρίσκεται σε διαφορετική πλάγια θέση ως προς τον δείκτη και διαβάζει είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη ένδειξη από αυτήν που προκύπτει με την ορθή κάθετη ανάγνωση.
- γ) *Στην αστάθεια των εξωτερικών συνθηκών.* Οι ίδιοι εξωτερικοί παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν με συστηματικό τρόπο τις μετρήσεις μας όπως περιγράφηκε παραπάνω στην παράγραφο 1.γ, αν αυτοί μεταβάλλονται με τυχαίο τρόπο κατά τη διάρκεια λήψης των μετρήσεων, ιδιαίτερα σε πειράματα μεγάλης χρονικής διάρκειας, είναι δυνατό να οδηγήσουν σε διασπορά μετρήσεων με τυχαίο τρόπο (οδηγώντας σε τιμές είτε μεγαλύτερες, είτε μικρότερες από αυτές που θα προέκυπταν αν δεν υπήρχαν μεταβολές στις εξωτερικές συνθήκες).

Παρατήρηση. Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, τα συστηματικά σφάλματα είναι πιο “επικίνδυνα” από τα τυχαία. Αν υπάρχουν μεγάλα τυχαία σφάλματα σ’ ένα πείραμα, τότε αυτά θα εκδηλωθούν στο αποτέλεσμα σαν σημαντική διασπορά στις μετρήσεις. Έτσι θα αντιληφθούμε ότι το αποτέλεσμά μας δεν έχει επαναληψιμότητα και θα πάρουμε τα μέτρα μας. Από την άλλη μεριά, τα συστηματικά σφάλματα είναι “κρυφά” και μπορούν να οδηγήσουν σ’ ένα φαινομενικά αξιόπιστο αποτέλεσμα, με μικρό σφάλμα, το οποίο στην πραγματικότητα απέχει πολύ από την πραγματική τιμή. Δεν υπάρχει ασφαλής κανόνας για να βρούμε και να εξουδετερώσουμε συστηματικά σφάλματα, εκτός από τον διαρκή και περιοδικό έλεγχο των οργάνων μέτρησης και την διερεύνηση εκ των προτέρων των πιθανών πηγών σφάλματος στις πειραματικές

διατάξεις. Επιπλέον, σημαντικό ρόλο παίζει η πείρα του πειραματιστή στην εκλογή της κατάλληλης πειραματικής μεθόδου η οποία θα εξαλείψει την επίδραση των εξωτερικών παραγόντων. Γενικά, θα πρέπει να υποπτευόμαστε πάντοτε τις συσκευές μας και αν είναι απαραίτητο, να τις ρυθμίζουμε συγκρίνοντάς τις με άλλες που τις θεωρούμε πιο ακριβείς (διακρίβωση οργάνων).

Κατά τη διάρκεια των εργαστηρίων θα πρέπει να είμαστε πάντοτε σε εγρήγορση ώστε να προβλέπετε και να αποφεύγετε τις πιθανές πηγές σφαλμάτων στις πειραματικές σας διατάξεις (π.χ. να μην κουνάτε τους εργαστηριακούς πάγκους). Επίσης κατά την συγγραφή της εργασιακής σας αναφοράς είναι πάντοτε χρήσιμο να προτείνετε τρόπους για την αντιμετώπιση όσων σφαλμάτων κατά τη γνώμη σας επιδέχονται βελτίωση.

Δ. ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Κατά τη διάρκεια των πειραματικών μετρήσεων σκοπός μας είναι να περιορίσουμε όσο γίνεται περισσότερο τα σφάλματα. Αρχικά προσπαθούμε να διακρίνουμε τα συστηματικά από τα τυχαία. Τα συστηματικά σφάλματα συνήθως μπορούμε να τα αποφύγουμε προσδιορίζοντας το μέγεθός τους και απαλείφοντάς τα με κατάλληλο τρόπο από τα μετρούμενα μεγέθη.

Τα τυχαία όμως μπορούμε *μόνο* να τα περιορίσουμε. Στο εξής θα αναφέρουμε εν συντομία τους βασικότερους τρόπους αντιμετώπισης των τυχαίων σφαλμάτων.

Η θεωρία της στατιστικής μας λέει ότι η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων μικραίνει όσο αυξάνει το πλήθος των μετρήσεων και όταν έχουμε πρακτικά απεριόριστο πλήθος μετρήσεων, η επίδρασή τους τείνει στο μηδέν.

Στο πείραμα όμως, ο αριθμός των μετρήσεών μας είναι περιορισμένος και επομένως, λόγω των τυχαίων σφαλμάτων, παρουσιάζεται ασάφεια στις μετρήσεις με συνέπεια η τιμή που προκύπτει να διαφέρει αρκετά από την πραγματική. Έτσι, την πραγματική τιμή μιας ποσότητας σε ελάχιστες περιπτώσεις είναι δυνατόν να την προσδιορίσουμε με “ιδανική” ακρίβεια. Εκείνο που μπορούμε να προσδιορίσουμε είναι η *καλύτερη* ή *πιθανότερη* τιμή της ποσότητας που μετράμε (η οποία δεν ταυτίζεται αναγκαστικά με την πραγματική τιμή).

Η πιθανότερη τιμή, που η πιο απλή της έκφραση (την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε εδώ) ταυτίζεται με την έννοια του *μέσου όρου*, είναι ένα νοητό κατασκεύασμα που δεν

ταυτίζεται αναγκαστικά με την τιμή κάποιας από τις μετρήσεις που κάναμε. Στα παρακάτω παρατίθεται μια απλοποιημένη εκδοχή των συλλογισμών που μας οδηγούν στην καταλληλότητα του μέσου όρου σαν αντιπροσωπευτικό αποτέλεσμα από μια ομάδα πειραματικών μετρήσεων. Σύμφωνα με το σκεπτικό αυτό, πρώτα εξετάζουμε τι προβλέπει η θεωρία της Στατιστικής για την συμπεριφορά των επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε την πραγματική τιμή ενός μεγέθους που υφίσταται την επίδραση τυχαίων σφαλμάτων. Στη συνέχεια, τα συμπεράσματα αυτά της Στατιστικής εφαρμόζονται στην επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων, όπου δεν είναι γνωστή η πραγματική τιμή.

Δ.1. Συμπεράσματα που προκύπτουν από την θεωρία της Στατιστικής

Ας υποθέσουμε ότι ένα φυσικό μέγεθος με γνωστή πραγματική τιμή X μετριέται πολλές φορές (n φορές) από έναν παρατηρητή ή από μια αυτοματοποιημένη διάταξη μετρήσεων. Η συλλογή αυτών των n μετρήσεων στην Στατιστική ονομάζεται *δείγμα*. Η λέξη “δείγμα” υπονοεί ότι οι μετρήσεις μας αποτελούν μέρος ενός υπερσυνόλου μετρήσεων, του λεγόμενου δειγματικού χώρου, που περιλαμβάνει τα άπειρα αποτελέσματα που δυνητικά μπορούν να προκύψουν από το δεδομένο πείραμα όταν αυτό διαρκεί για άπειρο χρόνο. Ο δειγματικός χώρος (που συνήθως ονομάζεται και κατανομή των μετρήσεων) συνιστά μια ιδεατή γενίκευση των πεπερασμένων πρακτικά μετρήσεων τις οποίες διαθέτουμε.

Εάν μια συγκεκριμένη μέτρηση είναι x_i , το σφάλμα της θα είναι

$$\varepsilon_i = x_i - X \quad (1)$$

Η μέση τετραγωνική τιμή του ε για το σύνολο των n μετρήσεων είναι γνωστή σαν *τυπική απόκλιση του δείγματος* ή απλά *τυπικό σφάλμα* και συμβολίζεται με σ . Έτσι,

$$\sigma = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \quad \text{όπου } \varepsilon_i = x_i - X \quad (2)$$

Ο μέσος όρος $\bar{x}$ του δείγματος n μετρήσεων ορίζεται σαν

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_n \quad (3)$$

Ο αριθμός n δεν είναι κατ' ανάγκη μεγάλος. Σ' ένα συνηθισμένο πείραμα για εκπαιδευτική χρήση συνήθως είναι από 5 έως 10 μετρήσεις. Ο μέσος όρος $\bar{x}$ επομένως στην γενική περίπτωση δεν είναι ίσος με το X .

Η πιθανότητα να συμπίπτει ο μέσος όρος με την πραγματική τιμή αυξάνει, όσο αυξάνει ο αριθμός των μετρήσεων n , γιατί, όπως αναφέραμε παραπάνω, μικραίνει η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων. Έτσι, για να βρούμε μέσο όρο που να πλησιάζει αρκετά στη πραγματική τιμή του μεγέθους μας, είναι αναγκαίο να έχουμε ένα αρκετά μεγάλο πλήθος μετρήσεων. Η θεωρία της Στατιστικής αποδεικνύει ότι για άπειρο πλήθος μετρήσεων, ο μέσος όρος ταυτίζεται με τη πραγματική τιμή.

Το σφάλμα στον μέσο όρο ορίζεται σαν:

$$E = \bar{x} - X \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι παίρνουμε ένα μεγάλο αριθμό δειγμάτων μετρήσεων από τον ίδιο δειγματικό χώρο, όπου το κάθε δείγμα αποτελείται από n μετρήσεις. Κάθε δείγμα μεγέθους n έχει το δικό του μέσο όρο E_i και όλοι αυτοί οι μέσοι όροι σχηματίζουν μια άλλη κατανομή, που ονομάζεται κατανομή των μέσων όρων. Η μέση τετραγωνική απόκλιση, δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από την πραγματική τιμή είναι γνωστή σαν *τυπικό σφάλμα στο μέσο όρο* ή *συνηθέστερα τυπική απόκλιση στον μέσο όρο* και συμβολίζεται με σ_m (το m προκύπτει από το αγγλικό mean που σημαίνει μέσος όρος). Έτσι

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i^2} \quad (5)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

Δ.2. Εφαρμογή της Στατιστικής στην Θεωρία Σφαλμάτων

Στην πράξη, κατά τη διάρκεια ενός πειράματος παίρνουμε μία μόνο ομάδα n μετρήσεων. Επειδή συνήθως δεν γνωρίζουμε την πραγματική τιμή X του μεγέθους που μετράμε, θεωρούμε τον μέσο όρο $\bar{x}$ σαν την καλύτερη εκτίμηση της τιμής του X και προσεγγίζουμε το σφάλμα αυτής της τιμής με την τυπική απόκλιση στον μέσο όρο σ_m . Το σ_m στις περισσότερες περιπτώσεις είναι η συνηθέστερη έκφραση για το σφάλμα στον μέσο όρο.

Μια εκτίμηση του σ προκύπτει από τις αποκλίσεις των μετρήσεων. Η *απόκλιση* d_i μιας μέτρησης x_i ορίζεται σαν

$$d_i = x_i - \bar{x} \quad (7)$$

Σε αντίθεση με το *σφάλμα* που ορίζεται σαν

$$\varepsilon_i = x_i - X \quad (8)$$

και είναι ουσιαστικά άγνωστο επειδή το X είναι άγνωστο, οι αποκλίσεις d_i είναι γνωστές ποσότητες, αφού εκφράζουν την διαφορά κάθε μέτρησης από τον μέσο όρο. Η μέση τετραγωνική τιμή των n αποκλίσεων συμβολίζεται με το s , και είναι γνωστή σαν *τυπική απόκλιση του δείγματος μετρήσεων*. Έτσι,

$$s^2 = \frac{1}{n} (d_1^2 + d_n^2 + \dots + d_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2$$

Τώρα, αποδεικνύεται από την θεωρία της Στατιστικής ότι η άγνωστη ποσότητα σ της σχέσης (6) προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την γνωστή ποσότητα s , αρκεί να διαιρέσουμε τον δεύτερο όρο της (9) με $(n-1)$ αντί με (n) , δηλαδή

$$s^2 = \frac{1}{n-1} (d_1^2 + d_n^2 + \dots + d_n^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (9)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας μόνο γνωστές ποσότητες (τα d_i), προσεγγίζουμε την τυπική απόκλιση στον μέσο όρο σ_m με την έκφραση

$$\sigma_m \cong \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n-1)}} \quad (10)$$

Προσέξτε ότι στην εξίσωση (9) προκύπτει ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος s εξαρτάται μόνο από την ακρίβεια των μετρήσεων και δεν εξαρτάται από το n . Αντίθετα, από την εξίσωση (10) προκύπτει ότι η ποσότητα σ_m εξαρτάται και από το s και από το n . Συνεπώς, η τυπική απόκλιση στον μέσο όρο σ_m *μειώνεται* αυξάνοντας το μέγεθος του δείγματος n . Στην πράξη όμως, επειδή η μείωση αυτή γίνεται κατά τον μικρό παράγοντα $1/\sqrt{n}$, *δεν εξυπηρετεί να αυξήσουμε τον αριθμό των μετρήσεων αλλά να ελαττώσουμε το σ* , δηλαδή να πάρουμε πιο προσεκτικά τις μετρήσεις μας, ώστε να έχουν μικρότερη διασπορά. Πράγματι, για να μειώσουμε κατά 10 φορές την τυπική

απόκλιση του συνόλου των μετρήσεων, πρέπει να κάνουμε $10^2 = 100$ φορές περισσότερες μετρήσεις από όσες διαθέτουμε.

Σαν πιο εποπτική εικόνα για τη σύγκριση σφαλμάτων και σαν μέτρο της ποιότητας των μετρήσεών μας, συνηθίζεται να χρησιμοποιείται και η έννοια του *επί τοις εκατό (π%) σφάλματος*, που δίνεται από τη σχέση

$$\pi = \frac{\sigma_m}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (11)$$

Το επί τοις εκατό σφάλμα αποτελεί μια πρόσφορη έκφραση για την έκφραση του **σχετικού σφάλματος** στο x , που ορίζεται σαν το ποσοστό του σφάλματος ως προς την μέση τιμή $\frac{\sigma_m}{\bar{x}}$. Το σ_m πολλές φορές αποκαλείται και **απόλυτο σφάλμα**, για να διακρίνεται από την έννοια του σχετικού σφάλματος.

Για να συνοψίσουμε:

Όταν διαθέτουμε ένα σύνολο n μετρήσεων $x_1, x_2, \dots, x_n$:

- Η αντιπροσωπευτικότερη τιμή των μετρήσεών μας είναι ο **μέσος όρος**

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- Το **τυπικό σφάλμα** (ή τυπική απόκλιση) **στον μέσο όρο** υπολογίζεται από την σχέση

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n-1)}}$$

- Αναφέρουμε το αποτέλεσμα των μετρήσεών μας σαν $\boxed{\bar{x} \pm \sigma_m}$
- Χρησιμοποιούμε επίσης και το **επί τοις εκατό σφάλμα π%**, που δίνει ποσοτική αίσθηση της ποιότητας των μετρήσεών μας.

Δ3. Η κατανομή των μετρήσεων, η γραφική της παράσταση και η κατανομή Gauss

Σε προηγούμενο παράγραφο ορίσθηκε η έννοια του δείγματος της κατανομής των μετρήσεων σαν το σύνολο των μετρήσεων μιας πειραματικής ποσότητας. Συχνά είναι

χρήσιμο να κατατάσσουμε τα δεδομένα μας σε διαδοχικές περιοχές τιμών και να καθορίζουμε πόσες μετρήσεις εμφανίζονται σε κάθε κατηγορία.

Στον παρακάτω Πίνακα Η.Ι παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ενός υποθετικού πειράματος για τη μέτρηση της αντίστασης ενός αγωγού. Οι τιμές της αντίστασης κυμαίνονται από 37 έως 77 Ohm και επιλέξαμε να τις κατατάξουμε σε οκτώ περιοχές με εύρος 5 Ohm η κάθε μία.

ΠΙΝΑΚΑΣ Δ.Ι Μετρήσεις της αντίστασης αγωγού.

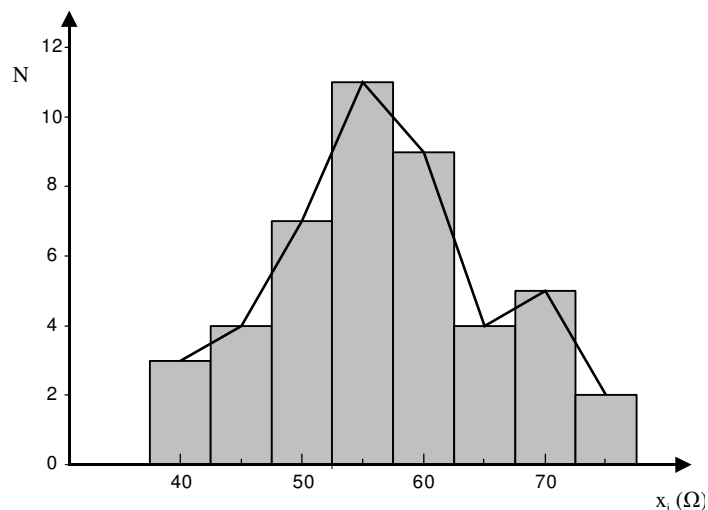
Αντίσταση (Ohm)	Συχνότητα
37.5 – 42.5	3
42.5 – 47.5	4
47.5 – 52.5	7
52.5 – 57.5	11
57.5 – 62.5	9
62.5 – 67.5	4
67.5 – 72.5	5
72.5 – 77.5	2

Η πρώτη περιοχή περιέχει τιμές μεταξύ 37.5 και 42.5 Ohm. Επειδή τρεις μετρήσεις βρέθηκαν στο διάστημα αυτό λέμε ότι η *συχνότητα επανάληψης* στο διάστημα αυτό είναι 3. Τα επόμενα διαστήματα είναι χωρισμένα με τον ίδιο τρόπο ανά 5 Ohm.

Μπορούμε τώρα να αποδώσουμε γραφικά τις μετρήσεις μας με ένα *Ιστόγραμμα* ή με ένα *πολύγωνο συχνότητας*. Το Ιστόγραμμα είναι ένα σύνολο από ορθογώνια που έχουν βάση στον άξονα των x , κέντρο βάσης το μεσαίο σημείο του διαστήματος που έχουμε επιλέξει και μήκος ίσο με το εύρος του διαστήματος (δηλ. 5 Ohm).

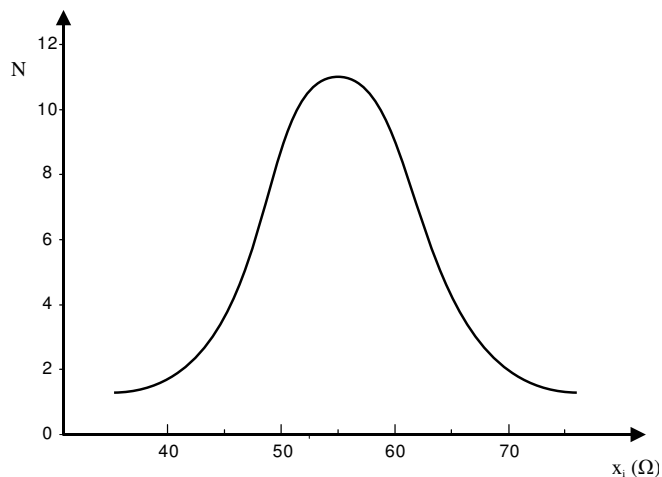
Το ύψος του κάθε ορθογωνίου είναι ίσο με τη συχνότητα επανάληψης των τιμών που περιέχει, και επειδή οι βάσεις των ορθογωνίων είναι ίσες, το εμβαδόν των ορθογωνίων είναι ανάλογο των αντίστοιχων συχνοτήτων επανάληψης (Σχήμα Η.1). Έτσι στο παράδειγμά μας, το πρώτο ορθογώνιο θα έχει σαν κέντρο βάσης το σημείο $(37.5+42.5):2 = 40$, μήκος 5 και ύψος 3. Το δεύτερο σημείο $(42.5+47.5):2 = 45$, μήκος πάλι 5 και ύψος 4 κοκ.

Αν ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογώνιων του ιστογράμματος, με ευθύγραμμα τμήματα, παίρνουμε μια τεθλασμένη γραμμή που λέγεται **πολύγωνο συχνότητας** (Σχήμα Η.1).



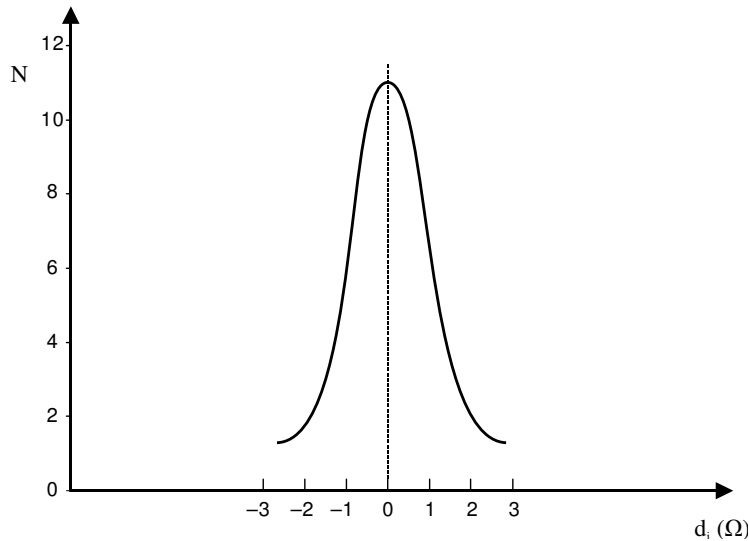
Σχήμα Η.1. Ιστόγραμμα και πολύγωνο συχνότητων μετρήσεων του Πίνακα Η.1

Αν τώρα οι μετρήσεις μας είναι πάρα πολλές και τα διαστήματα που επιλέξαμε επίσης πολύ μικρά, τότε το πολύγωνο συχνότητας θα αποτελείται από πολύ μικρά ευθύγραμμα τμήματα και οριακά θα προσεγγίζει τη μορφή μιας συνεχούς καμπύλης γραμμής όπως αυτή του Σχήματος Δ.2. Η μορφή αυτή εκφράζει την γραφική παράσταση της κατανομής απείρου πλήθους μετρήσεων, πρόκειται δηλαδή για μια θεωρητική θεώρηση του συνόλου των δυνατών μετρήσεων.



Σχήμα Δ.2: Το πολύγωνο συχνότητων προσεγγίζει μια συνεχή κωδωνοειδή καμπύλη.

Τοποθετώντας στον άξονα των x αντί για τις τιμές των μετρήσεών μας (x_i τις αντίστοιχες τιμές των αποκλίσεων από το μέσο όρο (d_i), παίρνουμε την καμπύλη του Σχήματος (Η.3). Η καμπύλη της κατανομής του Σχήματος Δ.3 είναι συμμετρική γύρω από τη τιμή $d = 0$ και λέγεται *κωδωνοειδής* (λόγω της μορφής της). Περιγράφει μια κατανομή δεδομένων που καλείται *κανονική κατανομή* ή *κατανομή του Gauss*.



Σχήμα Δ.3: Η καμπύλη κατανομής των αποκλίσεων d_i προσεγγίζει την καμπύλη Gauss.

Η φυσική σημασία της κανονικής κατανομής είναι ότι αποτελεί κριτήριο για το εάν τα σφάλματα που προκαλούν τη διασπορά των μετρήσεων είναι τυχαία και συνεπώς ισχύουν οι τύποι υπολογισμού των σφαλμάτων που έχουμε αναφέρει στις προηγούμενες παραγράφους.

Η πρακτική σημασία της κανονικής κατανομής συνίσταται στο ότι όσο πιο οξεία είναι η καμπύλη του Gauss, τόσο πόσο καλή είναι η ποιότητα των μετρήσεών μας (οξύτερη καμπύλη $\rightarrow$ συσσώρευση τιμών γύρω στο μέσο όρο $\rightarrow$ καλύτερη ποιότητα μετρήσεων).

Στα επόμενα θα παραθέσουμε μερικά βασικά στοιχεία της θεωρίας της Στατιστικής σχετικά με την καμπύλη Gauss, τα οποία έχουν άμεση πρακτική εφαρμογή στην επεξεργασία μετρήσεων στο εργαστήριο.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία της Στατιστικής, το αποτέλεσμα μιας μέτρησης θεωρείται σαν η τιμή μιας μαθηματικής τυχαίας μεταβλητής x , η οποία μπορεί να πάρει τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η γραφική αναπαράσταση των τιμών

μιας στατιστικής μεταβλητής ονομάζεται κατανομή και συνήθως εκφράζεται με μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$.

Στην στατιστική μελετούνται πολλά είδη κατανομών, οι οποίες έχουν διάφορες μορφές και διάφορες ιδιότητες. Μια από τις βασικότερες και χρησιμότερες κατανομές είναι η κατανομή Gauss, η οποία δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά το 1809 από τον Carl Friedrich Gauss στην μονογραφία “*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*” (Θεωρία της κίνησης των ουρανίων σωμάτων που κινούνται γύρω από τον Ήλιο επάνω σε κωνικές τομές).

Έχει παρατηρηθεί ότι πάρα πολλά φυσικά μεγέθη, τόσο στην φύση όσο και στο εργαστήριο, μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά από μια κατανομή Gauss. Μια απλή εξήγηση αυτού του φαινομένου στηρίζεται στο λεγόμενο κεντρικό οριακό θεώρημα (central limit theorem) της Στατιστικής, σύμφωνα με το οποίο, αν ικανοποιούνται ορισμένες συνθήκες, ο μέσος όρος ενός αρκούντως μεγάλου πλήθους ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες έχουν η καθεμία έναν πεπερασμένο μέσο όρο και πεπερασμένη διασπορά, τείνει προς μια κανονική κατανομή. Αν συνειδητοποιήσουμε ότι η τιμή μιας μέτρησης μπορεί να θεωρηθεί σαν το άθροισμα της πραγματικής τιμής ενός μεγέθους συν τις συνεισφορές από διάφορες πηγές σφαλμάτων τα οποία επηρεάζουν την μέτρηση με τυχαίο τρόπο, εύλογα προκύπτει ότι η πιθανότερη κατανομή των μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους θα είναι η κανονική κατανομή.

Προσοχή όμως, αυτό δεν ισχύει για όλα τα φυσικά φαινόμενα! Για παράδειγμα, στην Πυρηνική Φυσική, λόγω των χαρακτηριστικών του μηχανισμού της ραδιενεργής διάσπασης, η πιο συχνά απαντώμενη κατανομή είναι η κατανομή Poisson, η οποία είναι μια διαφορετική, ασύμμετρη κατανομή.

Η κατανομή Gauss μιας μεταβλητής x που παίρνει τυχαίες τιμές με κέντρο την μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ δίνεται από μια εκθετική συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με παραμέτρους τα μ και σ . Από την μορφή της $f(x)$ μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι έχει τις εξής ιδιότητες:

- είναι συμμετρική με κέντρο $x = \mu$
- έχει μέγιστο για $x = \mu$
- πέφτει γρήγορα και ασυμπτωτικά προς το μηδέν όσο απομακρυνόμαστε από την κορυφή
- έχει σημεία καμπής στις θέσεις $x = \pm\mu$

Η κατανομή Gauss ονομάζεται και κανονική κατανομή (normal distribution) και συχνά συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$.

Το γινόμενο $f(x) \cdot dx$ εκφράζει την πιθανότητα P μιας μέτρησης να βρίσκεται στο διάστημα $(x, x+dx)$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της $f(x) \cdot dx$ σε ένα διάστημα (a, b) που αντιστοιχεί στο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της $f(x)$ εκφράζει την πιθανότητα μιας μέτρησης να βρίσκεται στο διάστημα αυτό.

Αν ολοκληρώσουμε την συνάρτηση $f(x)$ από το μείον άπειρο έως το συν άπειρο προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$

που σημαίνει ότι στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ βρίσκεται το 100% των μετρήσεων, πράγμα που είναι προφανές. Το ολοκλήρωμα αυτό παριστάνει το (κανονικοποιημένο) εμβαδό κάτω από την καμπύλη της κανονικής κατανομής.

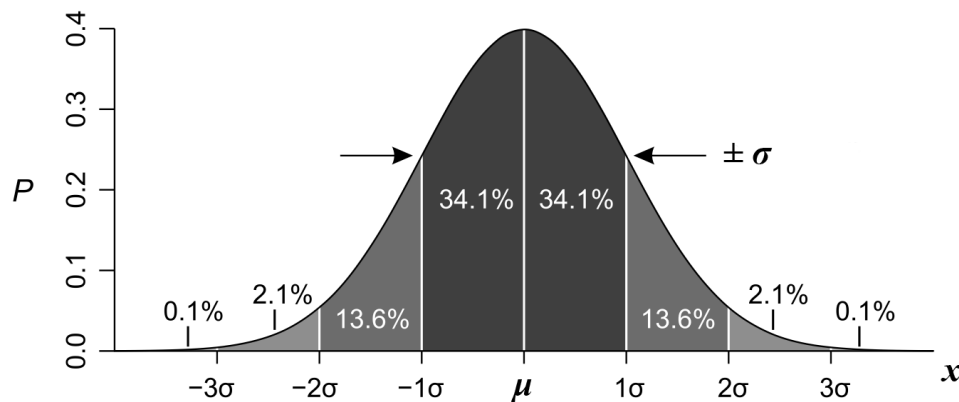
Από την μορφή της καμπύλης Gauss και μετά από ολοκλήρωση σε διάφορα χαρακτηριστικά διαστήματα γύρω από την κεντρική τιμή μ μπορούμε να συντάξουμε τον παρακάτω πίνακα, ο οποίος προκύπτει από τα εμβαδά κάτω από τις αντίστοιχες περιοχές της κανονικής κατανομής:

Πίνακας Δ.2: Ποσοστό μετρήσεων στις περιοχές $x \pm n\sigma$ ($n = 1, 2, 3$)

Διάστημα (a, b) γύρω από την κεντρική τιμή μ	Ποσοστό των μετρήσεων που βρίσκεται μέσα στο διάστημα (a, b)
$\mu \pm \sigma$ ($\mu - \sigma, \mu + \sigma$)	68.2 %
$\mu \pm 2\sigma$ ($\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$)	95.4 %
$\mu \pm 3\sigma$ ($\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$)	99.7 %

Τα διαστήματα $x \pm n\sigma$ ονομάζονται συνήθως και *διαστήματα εμπιστοσύνης* σε επίπεδο 68%, 95% ή 99%, επειδή εκφράζουν την εμπιστοσύνη την οποία μπορεί να έχει ο ερευνητής (ή ο αναγνώστης) στα πειραματικά αποτελέσματα.

Γραφικά ο παραπάνω πίνακας μπορεί να παρασταθεί με το παρακάτω σχήμα, το οποίο απεικονίζει το ποσοστό των μετρήσεων που βρίσκεται στις διάφορες χαρακτηριστικές περιοχές της κατανομής:



Σχήμα Δ.4: Βασικά χαρακτηριστικά της κατανομής Gauss.

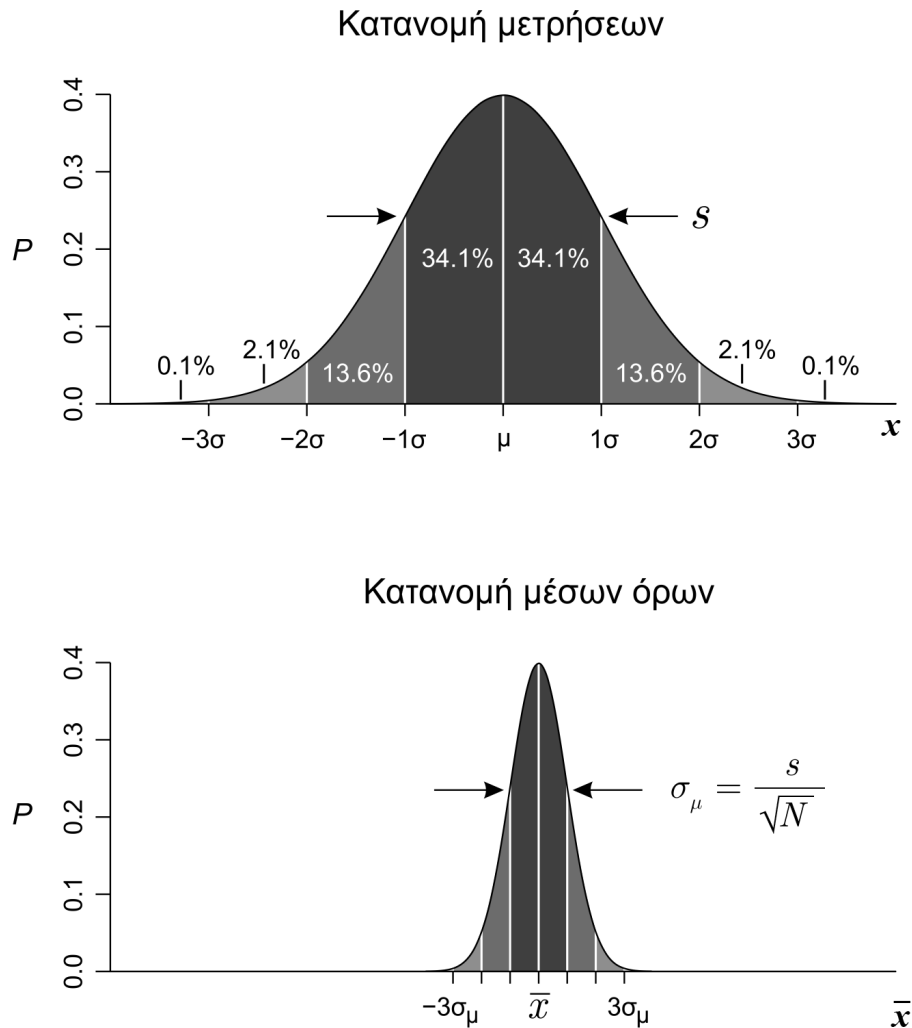
Όπως παρατηρούμε από τον πίνακα και το Σχήμα Δ.4, στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, δηλαδή περιοχής τιμών με εύρος δύο τυπικών αποκλίσεων από την πραγματική τιμή, βρίσκεται το 68% περίπου των μετρήσεων, ενώ στο διάστημα $\mu \pm 3\sigma$ βρίσκεται το 99.7% των μετρήσεων, πρακτικά δηλαδή το σύνολό τους.

Το Σχήμα Δ4 αφορά την αναπαράσταση του συνόλου των μετρήσεων οι οποίες είναι δυνατόν να προκύψουν από ένα πείραμα. Στην παράγραφο Δ1 εισάγαμε συνοπτικά την έννοια της κατανομής των μέσων όρων, η οποία σχηματίζεται αν θεωρήσουμε τους μέσους όρους όλων των πιθανών δειγμάτων N μετρήσεων τα οποία μπορούν να προκύψουν αν επαναλάβουμε το πείραμα άπειρες φορές. Επειδή η σχέση μεταξύ αυτών των δύο κατανομών δεν είναι εύκολα κατανοητή, στα επόμενα θα παραθέσουμε μια γραφική σύγκριση των δύο κατανομών.

Τι σχήμα αναμένεται να έχει η κατανομή των μέσων όρων; Αν θυμηθούμε την διατύπωση του κεντρικού οριακού θεωρήματος της Στατιστικής (βλ. σελ. 27), και συνειδητοποιήσουμε ότι η κατανομή των μέσων όρων στην ουσία είναι η κατανομή

αθροισμάτων τιμών διαιρεμένων με το πλήθος των τιμών, αντιλαμβανόμαστε ότι η κατανομή των μέσων όρων έχει κάθε λόγο να είναι και αυτή κανονική κατανομή.

Στο επόμενο Σχήμα Δ5 απεικονίζονται οι δύο κατανομές στο ίδιο διάγραμμα και στους ίδιους άξονες.



Σχήμα Δ.5: Η κατανομή των μετρήσεων και η κατανομή των μέσων όρων,.

Από το Σχήμα 5 μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

1. Οι δύο κατανομές έχουν μαθηματικά τον ίδιο οριζόντιο άξονα, αλλά η φυσική τους σημασία είναι διαφορετική: στο επάνω διάγραμμα τοποθετούνται οι τιμές των μετρήσεων, ενώ στο κάτω οι τιμές των μέσων όρων δειγμάτων μετρήσεων.

2. Η κατανομή των μέσων όρων είναι στενότερη από την κατανομή των μέσων όρων κατά τον παράγοντα $1/\sqrt{N}$.
3. Οι δύο κατανομές, στην ιδεατή περίπτωση που αφορούν άπειρο πλήθος μετρήσεων και άπειρο πλήθος δειγμάτων μεγέθους N , έχουν την ίδια θέση μεγίστου $x = \mu$. Στο Σχήμα Δ.5 είναι τοποθετημένες λίγο μετατοπισμένες η μία σε σχέση με την άλλη, για να τονιστεί το γεγονός ότι σε πραγματικές συνθήκες, δηλαδή πεπερασμένο πλήθος μετρήσεων, οι δύο κατανομές δεν έχουν αναγκαστικά την ίδια κορυφή.
4. Η κατανομή των μέσων όρων χωρίζεται και αυτή στις ίδιες χαρακτηριστικές περιοχές $\pm\sigma_\mu$, $\pm 2\sigma_\mu$ και $\pm 3\sigma_\mu$ οι οποίες καθορίζουν τα ίδια ποσοστά μέσων όρων που αναμένεται να βρίσκονται στις περιοχές αυτές.

Μετά από την παραπάνω συνοπτική παράθεση των πορισμάτων της Στατιστικής, μπορούμε να συνοψίσουμε τα χρηστικά συμπεράσματα όσον αφορά την επεξεργασία των πειραματικών μετρήσεων:

1. Η θεωρία της στατιστικής μας επιτρέπει από μία (μικρή συνήθως) ομάδα N μετρήσεων τις οποίες διεξάγουμε στο εργαστήριο να συμπεράνουμε προσεγγιστικά την μορφή δύο ιδεατών κατανομών. Η πρώτη είναι η κατανομή του συνόλου των απείρων μετρήσεων από τις οποίες προέρχεται το δείγμα μας, και η δεύτερη είναι η κατανομή των μέσων όρων δειγμάτων μετρήσεων παρόμοιων με αυτές που προέκυψαν στην πράξη. Αντιλαμβανόμαστε ότι ανάλογα με τις συγκεκριμένες πειραματικές τιμές που διαθέτουμε εξάγονται λίγο διαφορετικά αποτελέσματα.
2. Το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα του πειράματος, εφόσον υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μετρήσεις προέρχονται από μια κανονική κατανομή, είναι ο μέσος όρος των τιμών. Με δεδομένο όμως ότι αυτός ο μέσος όρος είναι απλά ένα σημείο της κατανομής των μέσων όρων (δηλ. αν επαναλάβουμε το πείραμα θα προκύψουν διαφορετικές τιμές και διαφορετικός μέσος όρος), πρέπει την γνώση μας αυτή να την αποτυπώσουμε στο τελικό αποτέλεσμα του πειράματος. Ο τυποποιημένος αυτός τρόπος είναι να αναφέρουμε το εύρος αυτής της κατανομής, δηλαδή την τυπική απόκλιση στον μέσο όρο σ_μ και να διατυπώσουμε το τελικό αποτέλεσμα σαν $x_{\text{πειρ}} = \bar{x} \pm \sigma_m$

3. Η φυσική σημασία της διατύπωσης $x_{\text{πειρ}} = \bar{x} \pm \sigma_m$ είναι η εξής: Από το δείγμα N μετρήσεων που πραγματοποιήσαμε στο εργαστήριο, συμπεραίνω ότι η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους (και εφόσον δεν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα στις μετρήσεις) αναμένεται με πιθανότητα 68% να βρίσκεται στην περιοχή $(\bar{x} - \sigma_m, \bar{x} + \sigma_m)$ (και με πιθανότητα 32% να βρίσκεται έξω από αυτήν).
4. Αν θελήσουμε να αυξήσουμε την βεβαιότητα όσον αφορά την αξιοπιστία στο τελικό αποτέλεσμα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα πιο διευρυμένο διάστημα εμπιστοσύνης. Το επίπεδο 68% για τα εκπαιδευτικά εργαστήρια είναι αρκετό, αλλά σε ερευνητικές εφαρμογές θεωρείται ανεπαρκές.

Ε. Η ΔΙΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Το αποτέλεσμα ενός πειράματος εξαρτάται συνήθως από έναν αριθμό μετρήσεων ποσοτήτων, η κάθε μια από τις οποίες υπόκειται σε σφάλμα. Πολλές φορές χρειάζεται να συνδυάσουμε τα σφάλματα αυτά, που υποτίθενται ανεξάρτητα μεταξύ τους, για να βρούμε το σφάλμα στο τελικό αποτέλεσμα.

Τυπικά προβλήματα που μπορεί να αντιμετωπίσετε στο εργαστήριο είναι τα εξής:

- α) Πόσο είναι το σφάλμα στον προσδιορισμό της συνολικής αντίστασης δύο αγωγών συνδεδεμένων εν σειρά ή παράλληλα που έχουν αντιστάσεις $12.2 \pm 0.2 \, \Omega$ και $35.4 \pm 0.5 \, \Omega$ αντίστοιχα;
- β) Πόσο είναι το σφάλμα στον υπολογισμό του εμβαδού ενός παραλληλογράμμου με διαστάσεις $1.23 \pm 0.01 \, \text{m}$ και $3.45 \pm 0.02 \, \text{m}$ αντίστοιχα;

(Σημείωση: Παρατηρήστε ότι στα παραπάνω δύο παραδείγματα χρησιμοποιείται ο όρος “υπολογισμός” ή “προσδιορισμός” και όχι η έννοια “μέτρηση” για την ολική αντίσταση ή το εμβαδό, γιατί πρόκειται για έμμεσο προσδιορισμό φυσικών μεγεθών με βάση τις πρωτογενείς πειραματικές μετρήσεις).

Με τον όρο “διάδοση” εννοούμε ότι ένα σφάλμα στην μία αντίσταση (ή την μια διάσταση του παραλληλογράμμου) θα προκαλέσει αντίστοιχο σφάλμα στον προσδιορισμό της ολικής αντίστασης (ή του εμβαδού).

Ας υποθέσουμε ότι η τελική ποσότητα της οποίας θέλουμε να προσδιορίσουμε την αβεβαιότητα είναι Z και τα μεγέθη που μετρήσαμε απ’ ευθείας είναι A, B, C κλπ. Έστω ότι τα σφάλματα στα $A, B, C \dots$ είναι $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ και ΔZ είναι το ζητούμενο τελικό

σφάλμα στο Z . (Με “σφάλμα” εννοούμε εδώ το σ_m). Οι σχέσεις μεταξύ των σφαλμάτων, για διάφορες σχέσεις μεταξύ Z και μετρουμένων μεγεθών δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας E.I: Πίνακας συνδυασμού σφαλμάτων.

Σχέση μεταξύ Z και $A, B, \dots$	Σχέση μεταξύ σφαλμάτων
(i) $Z = nA$	$\Delta Z = n \cdot \Delta A$
(ii) $Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n \frac{\Delta A}{A}$
(iii) $Z = A + B + C + \dots$ (iv) $Z = A - B \pm C \pm \dots$	$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 + \dots$
(v) $Z = AB$ (vi) $Z = A/B$	$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$
(vii) $Z = e^A$	$\Delta Z = e^A \Delta A$
(viii) $Z = \log A$	$\Delta Z = \Delta A / A$

Αυτά είναι τα πιο συνηθισμένα παραδείγματα συνδυασμού σφαλμάτων και προκύπτουν εύκολα από τον εξής γενικό κανόνα της ανάλυσης:

Αν μια μεταβλητή Z είναι μια συνάρτηση των $A, B, C, \dots$ δηλαδή $Z = Z(A, B, C, \dots)$, τότε το τελικό σφάλμα στο Z θα δίνεται συναρτήσει των μερικών παραγώγων του Z ως προς τα $A, B, C, \dots$ ως εξής:

$$(\Delta Z)^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial A} \cdot \Delta A \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B} \cdot \Delta B \right)^2 + \dots$$

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, μπορούμε να διατυπώσουμε τους εξής μνημονικούς κανόνες που αφορούν τις απλούστερες περιπτώσεις:

- Κατά την πρόσθεση ή την αφαίρεση προστίθενται τα τετράγωνα των απόλυτων σφαλμάτων.
- Κατά τον πολλαπλασιασμό ή την διαίρεση προστίθενται τα τετράγωνα των σχετικών σφαλμάτων.

Κατά την συγγραφή της εργαστηριακής αναφοράς επιβάλλεται κατά την επεξεργασία των τελικών αποτελεσμάτων να συμπεριλαμβάνεται και ο υπολογισμός των σφαλμάτων σε αυτά.

Z. ΒΛΕΠΟΝΤΑΣ ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΗ ΣΩΣΤΗ ΤΟΥΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Όταν κάποιος για πρώτη φορά διδάσκεται για τα σφάλματα, συνήθως δίνει σε αυτά ιδιαίτερη έμφαση, με τάση να ξοδεύει πάρα πολύ χρόνο γι' αυτά. Ας πούμε καθαρά ότι δεν απαιτείται πάντοτε να βρίσκετε το σφάλμα σε κάθε παρατήρηση που κάνετε σ' ένα πείραμα. Αφού κάνετε μερικές προκαταρκτικές μετρήσεις για να ελέγξετε αν οι συσκευές δουλεύουν κανονικά και πάρετε μια χονδρική ένδειξη για την ακρίβεια των μετρήσεων, θα πρέπει να πρώτα να καταπιαστείτε με το πείραμα και να *βγάλετε ένα αποτέλεσμα*, και στη συνέχεια να αξιολογήσετε την ποιότητα και την αξιοπιστία αυτού του αποτελέσματος με ανάλυση των πιθανών πηγών και συνεισφορών σφάλματος.

Στην πρώτη προσπάθεια εκτίμησης της αξιοπιστίας του αποτελέσματος σας είναι καλό να γνωρίζετε τα εξής:

- (1) Ένας υπολογισμός του τελικού σφάλματος με ακρίβεια της τάξης του 10% είναι (πρακτικά ένα σημαντικό ψηφίο στο σφάλμα) αρκετός στα πλαίσια του Γενικού Εργαστηρίου. Αν οι απαιτήσεις για ακρίβεια στο τελικό αποτέλεσμα είναι αυξημένες, τότε απαιτείται μεγαλύτερο δείγμα μετρήσεων και πιο προσεκτικές διαδικασίες μέτρησης.
- (2) Η τιμή του σ_m , όπως και του μέσου όρου $\bar{x}$, αλλάζει από μία ομάδα n μετρήσεων σε μια άλλη. Γι' αυτό η τιμή του σ_m είναι προσεγγιστική και όσο μικρότερο το n τόσο χειρότερη μπορεί να είναι.
- (3) Η φύση των κανόνων συνδυασμού σφαλμάτων είναι τέτοια ώστε πολλά σφάλματα είναι συχνά αμελητέα σε σχέση με άλλα μεγαλύτερα. Για παράδειγμα, παρατηρώντας τον πίνακα για το συνδυασμό σφαλμάτων, κάθε σφάλμα μικρότερο από το ένα τρίτο ενός άλλου σφάλματος μπορεί να παραληφθεί στις περιπτώσεις (iii) και (iv) που αφορούν αθροίσματα και διαφορές. Πράγματι, επειδή $(1/3)^2 \cong 0.1$, το μικρότερο απόλυτο σφάλμα συνεισφέρει στο τελικό σφάλμα μόνο κατά 10%. Παρόμοια, στις περιπτώσεις (v) και (vi) παρατηρούμε ότι ισχύει το ίδιο, αλλά για τα σχετικά σφάλματα.

Συχνά σ' ένα πείραμα μόνο ένα σφάλμα χρειάζεται να ληφθεί υπόψη γιατί τα άλλα είναι συγκριτικά αμελητέα. Το μόνο που χρειάζεται είναι να κάνετε είναι μια εκτίμηση που να πείθει ότι τα υπόλοιπα σφάλματα δεν συνεισφέρουν σημαντικά. Στις ασκήσεις του Γενικού Εργαστηρίου συνήθως δεν χρειάζεται να υπολογίσετε την συνεισφορά περισσότερων από 2 - 3 σφαλμάτων σε κάθε τελικό αποτέλεσμα.

Θ. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Από τη μέτρηση της αντίστασης ενός σύρματος με τη γέφυρα Wheatstone κατασκευάστηκε ο παρακάτω πίνακας:

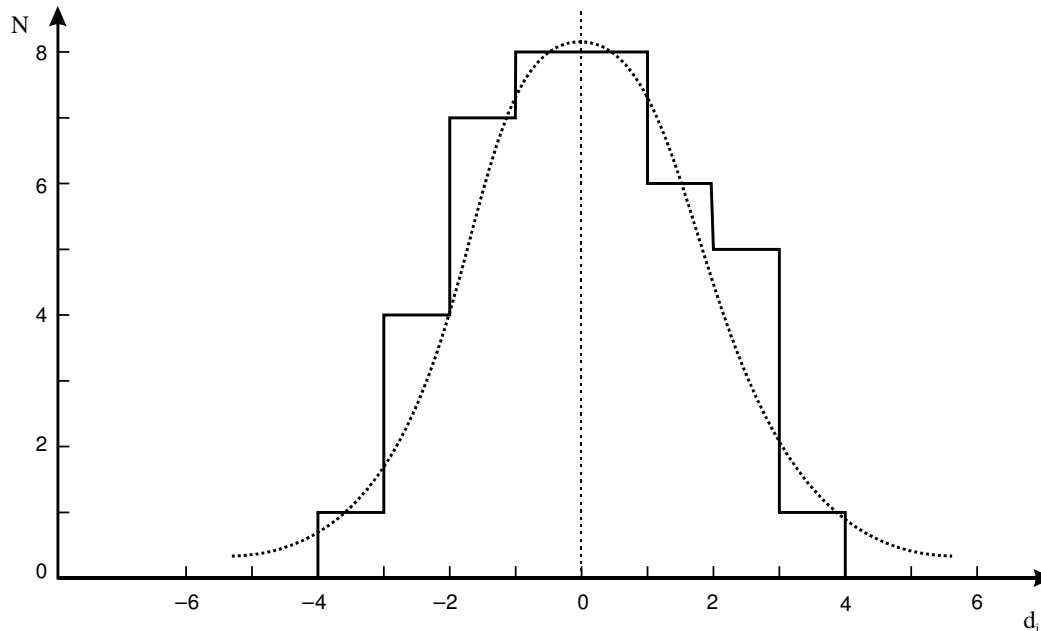
ΠΙΝΑΚΑΣ Η.1: Πειραματικές τιμές αντίστασης αγωγού.

a/a	R (Ohm)	Αποκλίσεις d (Ohm) (-) (+)		d ² (Ohm ²)	a/a	R (Ohm)	Αποκλίσεις d (Ohm) (-) (+)		d ² (Ohm ²)
1	56.32		0.02	0.0004	17	56.09		0.21	0.0441
2	56.21	0.09		0.0081	18	56.30		0.00	0.0000
3	56.47		0.17	0.0289	19	56.53		0.23	0.0529
4	56.55		0.25	0.0625	20	56.49		0.19	0.0361
5	56.35		0.05	0.0025	21	56.36		0.06	0.0036
6	56.13	0.17		0.0289	22	56.07		0.23	0.0529
7	56.02		0.28	0.0784	23	56.13		0.17	0.0289
8	56.19	0.11		0.0121	24	56.33		0.03	0.0009
9	56.42		0.12	0.0144	25	56.58		0.28	0.0784
10	56.43		0.13	0.0169	26	56.51		0.21	0.0441
11	56.63		0.33	0.1089	27	56.10		0.20	0.0400
12	56.22	0.08		0.0064	28	56.16		0.14	0.0196
13	56.45		0.15	0.0225	29	56.52		0.22	0.0484
14	56.17	0.13		0.0169	30	56.47		0.17	0.0289
15	56.94	0.36		0.1296	31	56.06		0.24	0.0576
16	56.12	0.18		0.0324	32	56.28		0.02	0.0004
Άθροισμα :					n = 32	1801.60	-2.61	+2.61	1.1055

Μ.Ο. $\bar{x} = 56.30 \Omega$

Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα αποκλίσεων - συχνότητας επανάληψης αποκλίσεων.

Βλέπουμε ότι ή καμπύλη που προκύπτει είναι κωδωνοειδής, άρα τα σφάλματα είναι τυχαία.



Σχήμα 0.1: Έλεγχος του ιστογράμματος μετρήσεων για κανονικότητα της κατανομής και η αντίστοιχη προσαρμοσμένη καμπύλη Gauss.

Από τον πίνακα Η.1 προκύπτουν τα εξής μεγέθη:

$$n = 32 \quad \bar{x} = 56.30 \quad \sum d_i^2 = 1.104 \cong 1.10$$

Από την (9) προκύπτει ότι: $\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n(n-1)}} = 0.03$

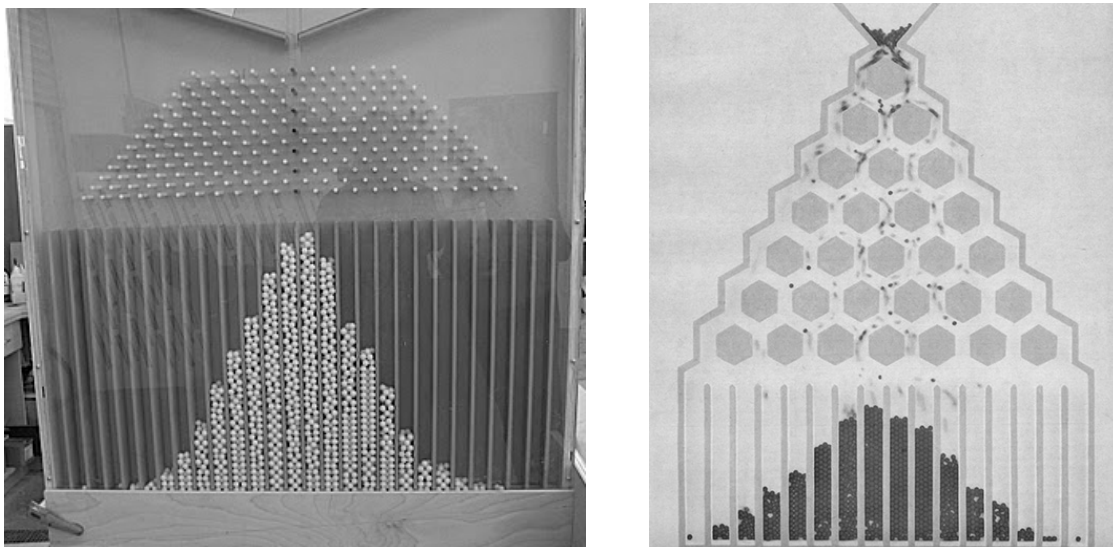
άρα $\sigma_m = 0.03 \, \Omega$.

Συνεπώς η πειραματική τιμή της αντίστασης είναι: $R = 56.30 \pm 0.03 \, \Omega$

Η επί τοις εκατό ακρίβεια του αποτελέσματος είναι $\pi\% = 0.03/56.30 \cdot 100\% = 0.06\%$

Μηχανικό ανάλογο του τυχαίου χαρακτήρα των σφαλμάτων και της κατανομής Gauss (Francis Galton, 1874).

Η διάταξη που φαίνεται στο επόμενο σχήμα Θ.2, είναι ένας τρόπος να αναπαραστήσουμε μηχανικά τον τυχαίο χαρακτήρα των σφαλμάτων και να πάρουμε την κατανομή Gauss των τυχαίων σφαλμάτων.



Σχήμα Θ.2: Μηχανική διάταξη (αριστερά) και γραφική αναπαράσταση (δεξιά) της μηχανής του Galton.

Από το πάνω μέρος της διάταξης αφήνουμε να κυλήσουν μικρά σφαιρίδια, τα οποία κατά την πτώση τους συναντούν εμπόδια σε κανονική διάταξη (καρφάκια), πάνω στα οποία προσκρούουν διαδοχικά τα σφαιρίδια. Τα σφαιρίδια σε κάθε σύγκρουση έχουν ίση πιθανότητα να πάνε δεξιά ή αριστερά και τελικά πέφτουν στα αυλάκια που βρίσκονται στο κάτω μέρος.

Κανονικά τα σφαιρίδια θα έπρεπε κυλώντας ανάμεσα από τα κεντρικά εμπόδια χωρίς κρούσεις να πέσουν όλα στο κεντρικό αυλάκι. Τυχαία όμως γεγονότα κατά μήκος της διαδρομής τους, τα αναγκάζουν να προσκρούουν σε διάφορα καρφιά, με αποτέλεσμα να ακολουθούν μια τεθλασμένη πορεία και να πέφτουν τελικά σε ένα από τα αυλάκια. Αν ο αριθμός των σφαιριδίων που θα αφήσουμε να πέσουν είναι μεγάλος, θα δούμε ότι επειδή οι κρούσεις των σφαιριδίων με τα εμπόδια είναι τυχαίες, η κατανομή του πλήθους των σφαιριδίων σε κάθε αυλάκι είναι κατανομή Gauss.

Το πείραμα αυτό μπορεί να επεκταθεί και να περιλάβει την επίδραση των συστηματικών σφαλμάτων. Έτσι αν σε όλο το σύστημα δώσουμε μια κλίση προς μια μεριά, ή το βάλουμε μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, θα δούμε μια αλλαγή στην κατανομή που πήραμε προηγούμενα όταν δεν επιδρούσε μια από αυτές τις αιτίες. Αφήνεται σαν ερώτηση η μορφή της καμπύλης που θα περιγράφει την κατανομή των σφαιριδίων υπό την επίδραση των συστηματικών σφαλμάτων που εισάγονται από τις παραπάνω αιτίες.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος καταχωρούμε τις μετρήσεις **σε οργανωμένους πίνακες** ώστε να έχουμε μία συστηματική καταγραφή των πειραματικών αποτελεσμάτων και του φαινομένου που μελετάμε. Ακόμα εποπτικότερη παράσταση του φαινομένου μπορούμε να επιτύχουμε με τη **γραφική απεικόνιση** ή το **διάγραμμα** των ζευγών των τιμών των μεταβλητών πάνω σε διάγραμμα $x-y$ ορθογωνίων συντεταγμένων. Αυτό μας δίνει μια πρώτη εικόνα της πορείας του φαινομένου και της αλληλεξάρτησης των μεταβλητών.

Το διάγραμμα μας δίνει τη δυνατότητα να απεικονίσουμε την αριθμητική τιμή των μεγεθών σ' όλη την έκταση των τιμών που μετρήσαμε. Ακόμη μας βοηθά να αντιληφθούμε τη γενική μαθηματική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές (π.χ. το αν είναι γραμμική ή μη γραμμική) και να εντοπίσουμε ενδεχόμενες πειραματικές μετρήσεις με σημαντική απόκλιση από τις υπόλοιπες.

Για την κατάστρωση του διαγράμματος ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία: Φέρνουμε δύο ευθείες (άξονες) κάθετες μεταξύ τους. Η οριζόντια ευθεία ονομάζεται άξονας των τετμημένων ή άξονας των X και η κατακόρυφη ευθεία ονομάζεται άξονας των τεταγμένων ή άξονας των Y . Υποδιαιρούμε τον άξονα των τετμημένων σε ίσα τμήματα, ώστε κάθε τμήμα να αντιπροσωπεύει ίσο αριθμό μονάδων του μεγέθους που θέλουμε να τοποθετήσουμε. Όμοια εργαζόμαστε και πάνω στον άξονα των τεταγμένων. Οι υποδιαιρέσεις γίνονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μην έχουμε συσσώρευση τιμών σ' ένα μικρό τμήμα του χώρου που διαθέτουμε, αλλά οι τιμές να εκτείνονται σ' όλη την έκτασή του. Κάτω από κάθε άξονα γράφουμε το σύμβολο του φυσικού μεγέθους το οποίο αντιπροσωπεύει και δεξιά από αυτό γράφουμε μέσα σε παρένθεση την μονάδα μετρήσεώς του.

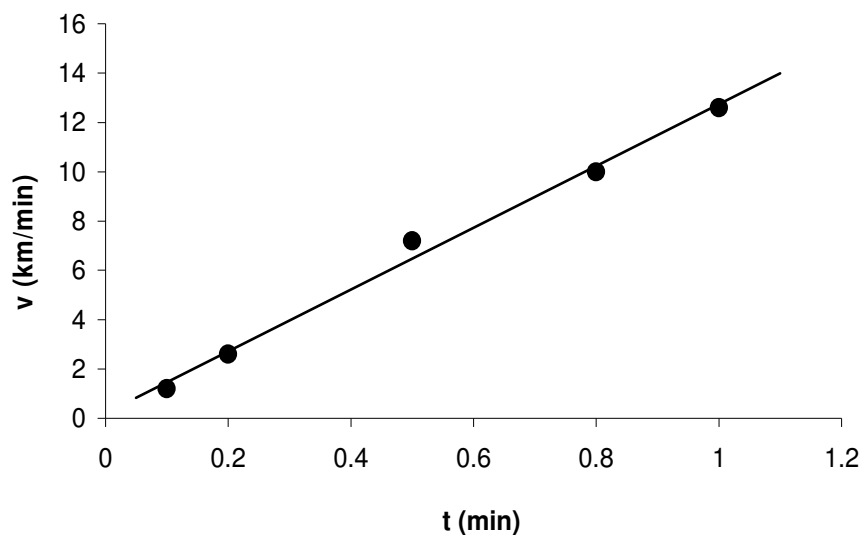
Το συνηθέστερο είδος διαγράμματος που χρησιμοποιούμε στο εργαστήριο είναι το χιλιοστομετρικό χαρτί (χαρτί μιλλιμετρέ), το οποίο που έχει χαραγμένα εκατοστά και χιλιοστά. Το χαρτί αυτό είναι το καταλληλότερο για την απεικόνιση σχέσεων που είναι γραμμικές. Όπως όμως θα δούμε αργότερα, στο εργαστήριο χρησιμοποιούμε και άλλα είδη χαρτιών όπως το ημιλογαριθμικό (semilog) και το λογαριθμικό (log-log)χαρτί.

Παράδειγμα

Κατά την κίνηση ενός σώματος μετράμε την ταχύτητα και τον χρόνο παρατήρησης και βρίσκουμε τις πειραματικές τιμές του παρακάτω Πίνακα I.1:

ΠΙΝΑΚΑΣ I.1. Τιμές ταχύτητας – χρόνου ενός κινητού

A/A	v (km/min)	t (min)
1	1.2	0.1
2	2.6	0.2
3	7.2	0.5
4	10.0	0.8
5	12.6	1.0



Σχήμα I.1: Γραφική παράσταση των μετρήσεων του Πίνακα I.1 και η καλύτερη ευθεία που αντιπροσωπεύει τα πειραματικά δεδομένα.

Επειδή ο χρόνος είναι ανεξάρτητος της ταχύτητας, τον θεωρούμε σαν την ανεξάρτητη μεταβλητή και την ταχύτητα σαν την εξαρτημένη μεταβλητή.

Έτσι, τοποθετούμε τον χρόνο στον άξονα των X και σημειώνουμε μέσα σε παρένθεση τη μονάδα μέτρησής του. Με τον ίδιο τρόπο τοποθετούμε την ταχύτητα και τη μονάδα μέτρησής της στον άξονα των Y .

Στη συνέχεια χωρίζουμε τους δύο άξονες σε ίσα διαστήματα τον καθένα (τα διαστήματα στον ένα άξονα είναι διαφορετικά από τα διαστήματα στον άλλο) και τοποθετούμε τα ζεύγη των τιμών πάνω στο διάγραμμα ως σημεία με συντεταγμένες (t, y) . Δεδομένου ότι οι άξονες είναι βαθμολογημένοι, δεν πρέπει να αναγράφονται οι συντεταγμένες των πειραματικών σημείων στους άξονες.

Σημειωτέον ότι οι άξονες δεν είναι απαραίτητο να έχουν πάντα ως αρχή το $(0, 0)$ (αρκεί να είναι σωστά βαθμολογημένοι).

Σχεδιάζουμε την καλύτερη γραμμή μεταξύ των σημείων. Σαν “καλύτερη γραμμή” χαρακτηρίζουμε την απλούστερη ευθεία γραμμή, που περνά πιο κοντά απ' όλα τα σημεία και όχι την τεθλασμένη που ενώνει τα σημεία μεταξύ τους. Στο παραπάνω παράδειγμα ή καλύτερη γραμμή είναι η ευθεία, διότι γνωρίζουμε ότι στην κινηματική η ταχύτητα είτε θα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου, είτε παραβολική, περίπτωση που δεν υποστηρίζεται από τα συγκεκριμένα μας πειραματικά δεδομένα. Στην γενικότερη περίπτωση η καλύτερη γραμμή θα είναι μια ομαλή καμπύλη, εφόσον βέβαια το φαινόμενο που αναπαριστάται δεν έχει σημεία καμπής. Εάν το φαινόμενο το οποίο μελετάται περιέχει μετατροπές φάσης, π.χ. θερμοκρασία βρασμού ή τήξης ενός υλικού, είναι αναμενόμενο η καλύτερη γραμμή να έχει σημείο καμπής και να αποτελείται από δύο τμήματα που αντιστοιχούν στις δύο διαφορετικές φάσεις.

Εξισώσεις καμπύλων.

Μερικές από τις σχέσεις που ενδέχεται να συνδέουν τις μεταβλητές x και y μεταξύ τους μπορεί να είναι της μορφής:

$$y = a_0 + a_1 x \quad (A)$$

$$y = C x^n \quad (B)$$

$$y = D e^{kx} \quad (Γ)$$

ή

$$y = D 10^{kx}$$

όπου a_0, a_1, C, n, D, k είναι σταθερές και x και y οι μεταβλητές του πειράματος.

Η σχέση της μορφής (Α) μας δηλώνει ότι η εξάρτηση των μεταβλητών είναι γραμμική και η γραφική της παράσταση σε χιλιοστομετρικό χαρτί μας δίνει ευθεία γραμμή.

Οι σχέσεις (Β) και (Γ) είναι εκθετικές συναρτήσεις και αν οι μεταβλητές του πειράματος συνδέονται με αυτές τις σχέσεις, τότε η γραφική τους παράσταση σε χιλιοστομετρικό χαρτί μας δίνει γενικά καμπύλη γραμμή. Στην περίπτωση (Β), όταν ο εκθέτης $n = 1$, τότε προκύπτει η μορφή (Α) με $a_0 = 0$, ενώ αν $n = 0$ τότε η y είναι σταθερή.

Θεωρία Ελαχίστων Τετραγώνων

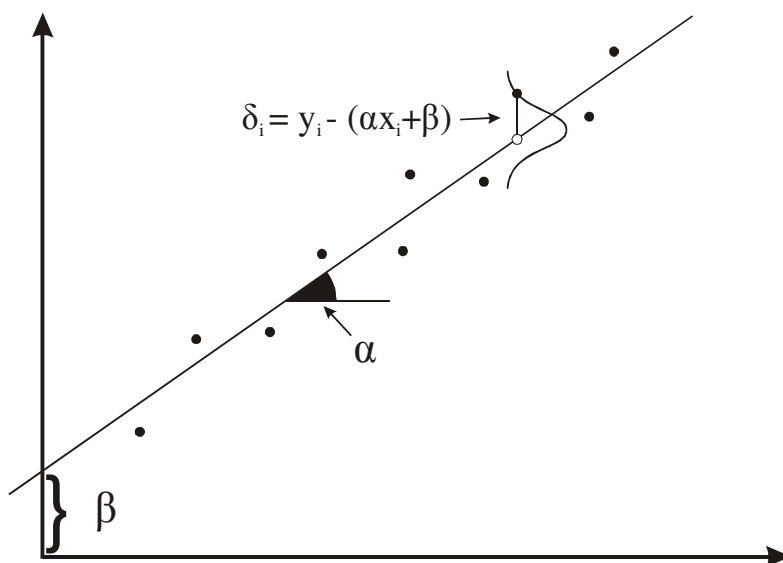
Στα επόμενα παρουσιάζεται η λογική με βάση την οποία προσαρμόζουμε είτε μια ευθεία, είτε μια καμπύλη σε πειραματικά δεδομένα, με σκοπό την εύρεση των παραμέτρων των καμπυλών αυτών.

α) Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Στο προηγούμενο παράδειγμα των πειραματικών μετρήσεων του Πίνακα Ι.1 σχεδιάσαμε την γραφική παράσταση του Σχήματος Ι.1 και αναζητήσαμε την καλύτερη ευθεία που διέρχεται ανάμεσα από τα πειραματικά σημεία με ποιοτικά κριτήρια. Ακολουθεί μια ποσοτική προσέγγιση του προβλήματος. Στα επόμενα γίνεται η παραδοχή ότι η αβεβαιότητα στα x_i είναι πολύ μικρότερη από αυτή των y_i .

Για να βρούμε την βέλτιστη ευθεία $y = ax + \beta$ που αντιπροσωπεύει το σύνολο των σημείων (x_i, y_i) του Σχήματος Ι.1, χρειαζόμαστε ένα μέτρο της “συλλογικής απόστασης” της ζητούμενης ευθείας από τα πειραματικά σημεία και αυτό είναι το **άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων δ_i των σημείων από την ευθεία**, $S = \sum \delta_i^2$.

Η **αρχή των ελαχίστων τετραγώνων** ή αρχή του Legendre εκφράζει την υπόθεση ότι η καλύτερη ευθεία είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από αυτήν. Με άλλα λόγια, η ζητούμενη ευθεία είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα S των τετραγώνων των αποκλίσεων $S = \sum \delta_i^2 = \sum [y_i - (ax_i + \beta)]^2$ γίνεται **ελάχιστο**.



Σχήμα I.2: Τα πειραματικά σημεία, η ζητούμενη βέλτιστη ευθεία $y = \alpha x + \beta$ και οι κατακόρυφες αποκλίσεις δ_i των σημείων αυτών από την ευθεία.

Η ελαχιστοποίηση της έκφρασης $\sum \delta_i^2$ γίνεται με την ίδια τεχνική με την οποία βρίσκουμε το ελάχιστο μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής: θεωρούμε το άθροισμα S σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών α και β , $S = S(\alpha, \beta)$ και μηδενίζουμε τις πρώτες παραγώγους του S ως προς α και β . Η λύση του προκύπτοντος συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (τα α και β) δίνει τις εκφράσεις για τα α και β των παρακάτω τύπων (1).

$$\alpha = \frac{N \cdot \sum (x_i y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad \beta = \frac{\sum x_i^2 \cdot (\sum y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum x_i y_i)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (I.1)$$

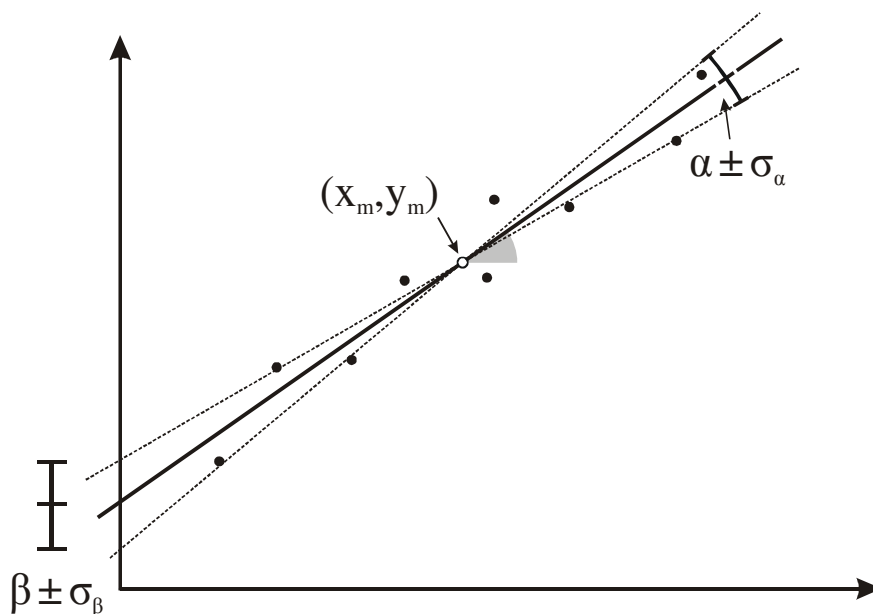
Από τις εξισώσεις αυτές μοιάζει να προκύπτει το συμπέρασμα ότι από την δεδομένη ομάδα των N πειραματικών σημείων προκύπτει μία μόνο λύση, ένα μοναδικό ζεύγος (α, β) , δηλαδή μία μοναδική ευθεία. **Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ευθείας.** Αν θυμηθούμε ότι το κάθε πειραματικό σημείο (x_i, y_i) αποτελεί ένα σημείο μιας κατανομής Gauss πιθανών τιμών του y για κάθε δεδομένο x_i (προσέξτε την μικρή καμπύλη Gauss στο Σχήμα I.2), αντιλαμβανόμαστε ότι η ομάδα των N σημείων (x_i, y_i) δεν είναι μοναδική: αν επαναλάβουμε το πείραμα, θα προκύψουν μια διαφορετική ομάδα μετρήσεων με

παραπλήσιες τιμές. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη αβεβαιότητας για το κάθε y_i έχει αναγκαστικά σαν αποτέλεσμα την ύπαρξη αβεβαιότητας (με την μορφή της τυπικής απόκλισης) στην τιμή των συντελεστών α και β , η οποία εκφράζεται από τους παρακάτω τύπους (I.2).

$$\sigma_{\alpha} = s_y \cdot \sqrt{\frac{N}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \quad \sigma_{\beta} = s_y \cdot \sqrt{\frac{(\sum x_i^2)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \quad (\text{I.2})$$

$$\text{όπου } s_y = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{\sum [y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2}{N-2}} \quad (\text{I.3})$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό των σ_{α} και σ_{β} χρησιμοποιείται η ενδιάμεση ποσότητα s_y η οποία εκφράζει την μέση απόκλιση ανά πειραματικό σημείο. Όσο πιο απομακρυσμένα είναι τα σημεία από μια νοητή ευθεία, τόσο μεγαλύτερη η αβεβαιότητα στα α και β .



Σχήμα I.3: Οι τιμές των συντελεστών της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων $y = \alpha x + \beta$ μαζί με τις αβεβαιότητες σ_{α} και σ_{β} στις τιμές αυτές ορίζουν μια δέσμη ευθειών, οι οποίες αναπαριστούν την περιοχή τιμών που θεωρείται ως το αποτέλεσμα του πειράματος.

Η ενδιάμεση ποσότητα s_y αποτελεί μέτρο της απόκλισης των σημείων από την ευθεία με τον ίδιο τρόπο που η τυπική απόκλιση στον μέσο όρο αποτελεί μέτρο της διασποράς των μετρήσεων από τον μέσο όρο κατά τις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους. Στην περίπτωση όμως της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων έχουμε δύο τυπικές αποκλίσεις, αυτές των σ_α και σ_β .

Η καλύτερη ευθεία $ax + \beta$ βρίσκεται (με πιθανότητα 68%) κάπου ανάμεσα σε 2 οριακές ευθείες που προσδιορίζονται από τα όρια $(\alpha \pm \sigma_\alpha)$ και $(\beta \pm \sigma_\beta)$. Σημειωτέον ότι **τα σ_α και σ_β δεν είναι ανεξάρτητα** διότι οι διάφορες ευθείες που συμπεραίνονται από την ομάδα των N σημείων αποδεικνύεται ότι αποτελούν δέσμη που διέρχεται από το κέντρο βάρους των σημείων, (x_m, y_m) .

Για να συνοψίσουμε:

Όταν διαθέτουμε ένα σύνολο πειραματικών ζευγών μετρήσεων (x_i, y_i) που προέκυψαν από την μελέτη της μεταβολής του φυσικού μεγέθους y από το x και τα οποία σε γραμμικό διάγραμμα $x - y$ βρίσκονται κοντά σε ευθεία:

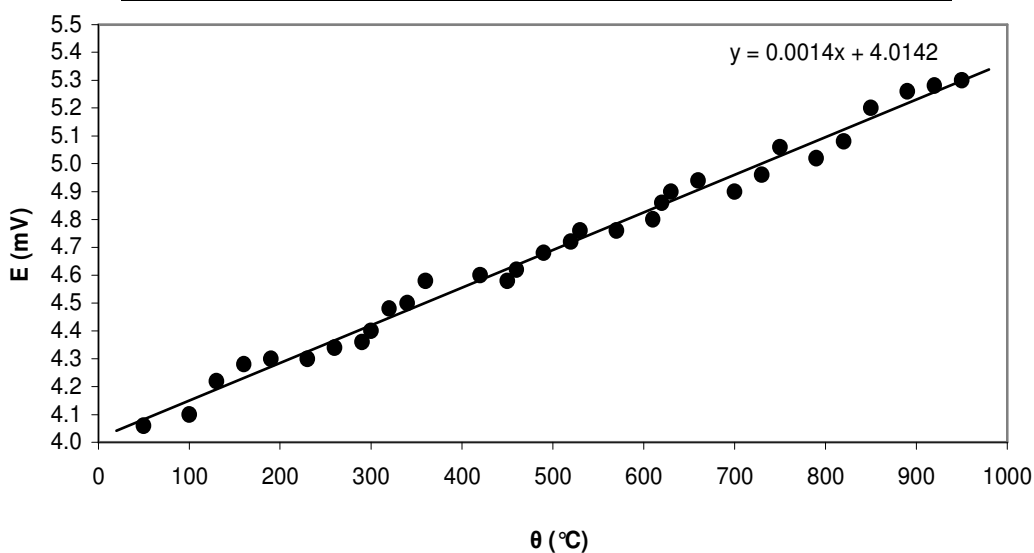
- Η αντιπροσωπευτικότερη ευθεία που περιγράφει τα πειραματικά μας αποτελέσματα είναι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.
- Οι συντελεστές της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζονται από τις σχέσεις (I.1).
- Οι αβεβαιότητες στον προσδιορισμό των συντελεστών της ευθείας προσδιορίζονται με βάση τις σχέσεις (I.2)
- Αντιστοιχίζουμε τις μαθηματικές παραμέτρους α και β με τα φυσικά μεγέθη που εμπλέκονται στο φαινόμενο που μελετάμε και από αυτές προσδιορίζουμε τις άγνωστες παραμέτρους (π.χ. σε φαινόμενο ελεύθερης πτώσης $v = g t$, με δεδομένα ζεύγη τιμών (v, t) μπορούμε να προσδιορίσουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας καθώς και την αβεβαιότητα στον προσδιορισμό αυτό).
- Συνοδεύουμε πάντοτε τα αποτελέσματα των πειραμάτων που προκύπτουν με την βοήθεια της αρχής ελαχίστων τετραγώνων με τις αβεβαιότητες στα αποτελέσματα αυτά, με την μορφή $\alpha \pm \sigma_\alpha$ και $\beta \pm \sigma_\beta$
- Αν χρειάζεται, εκφράζουμε επίσης και το επί τοις εκατό σφάλμα, $\pi\%$, στους συντελεστές της ευθείας.

Παράδειγμα:

Κατά την μέτρηση της τάσης ενός θερμοηλεκτρικού στοιχείου συναρτήσει της θερμοκρασίας του προκύπτουν τα παρακάτω ζεύγη τιμών του Πίνακα Ι.2. Να βρεθεί η εξίσωση που συνδέει τα δύο μεγέθη.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.2: Τιμές θερμοκρασίας – θερμοτάσης θερμοζεύγους.

X: θ (°C)	Y: E (mV)	X: θ (°C)	Y: E (mV)	X: θ (°C)	Y: E (mV)
50	4.06	450	4.58	790	5.02
100	4.10	460	4.62	820	5.08
130	4.22	490	4.68	850	5.20
160	4.28	520	4.72	890	5.26
190	4.30	530	4.76	920	5.28
230	4.30	570	4.76	950	5.30
260	4.34	610	4.80		
290	4.36	620	4.86		
300	4.40	630	4.90		
320	4.48	660	4.94		
340	4.50	700	4.90		
360	4.58	730	4.96		
420	4.60	750	5.06		



Σχήμα Ι.4: Γραφική παράσταση των δεδομένων του Πίνακα Ι.2 και η αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

Τοποθετώντας τα ζεύγη των τιμών του Πίνακα Ι.2. σε χιλιοστομετρικό χαρτί, προκύπτει η γραφική παράσταση του Σχήματος Ι.4:

Διαπιστώνουμε ότι παίρνουμε ευθεία γραμμή, επομένως η σχέση είναι γραμμική.

Για τον υπολογισμό των συντελεστών της ευθείας, στην περίπτωση που δεν διαθέτουμε ηλεκτρονικό υπολογιστή, μπορούμε να καταστρώσουμε έναν πίνακα για τον υπολογισμό των βοηθητικών ποσοτήτων που εμπλέκονται κατά τους υπολογισμούς με βάση τους τύπους της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.2. Βοηθητικός πίνακας για τους υπολογισμούς ελαχίστων τετραγώνων.

X: θ ($^{\circ}$)	Y:E (mV)	$X^2 \times 10^4$	$XY \times 10^2$
50	4.06	0.25	2.0
100	4.10	1.00	4.1
130	4.22	1.69	5.5
160	4.28	2.56	6.8
190	4.30	3.61	8.2
230	4.30	5.29	9.9
260	4.34	6.76	11.3
290	4.36	8.41	12.6
300	4.40	9.00	13.2
320	4.48	10.2	14.3
340	4.50	11.6	15.3
360	4.58	13.0	16.5
420	4.58	17.6	19.3
450	4.60	20.2	20.6
460	4.62	21.2	21.2
490	4.68	24.0	22.9
520	4.72	27.1	24.5
530	4.76	28.1	25.2
570	4.76	32.5	27.1
610	4.80	37.2	29.3
620	4.86	38.4	30.1
630	4.90	39.7	30.9
660	4.94	43.6	32.6
700	4.90	49.0	34.3
730	4.96	53.3	36.2
750	5.06	56.2	37.9
790	5.02	62.4	39.7
820	5.08	67.2	41.7

X: θ (C ⁰)	Y:E (mV)	X ² x 10 ⁴	XY x 10 ²
850	5.20	72.2	44.2
890	5.26	79.2	46.8
920	5.28	84.6	48.6
$\sum X_i = 16090$	$\sum Y_i = 150,20$	$\sum X_i^2 = 1017.3 \times 10^4$	$\sum X_i Y_i = 783,2 \times 10^2$

$$\alpha = \frac{\sum Y_i \cdot \sum X_i^2 - \sum X_i \cdot \sum X_i Y_i}{N \cdot \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{1.5279 \times 10^9 - 1.2602 \times 10^9}{3.2553 \times 10^8 - 2.5889 \times 10^8} = 4.017 \text{ mV}$$

$$\beta = \frac{N \cdot \sum X_i Y_i - \sum X_i \cdot \sum Y_i}{N \cdot \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{2.506 \times 10^6 - 2.4167 \times 10^6}{3.2553 \times 10^8 - 2.5889 \times 10^8} = 13.36 \text{ mV}\Theta^{-1}$$

Η εξίσωση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι:

$$E \text{ (mV)} = 4.017 + 13.36 \times 10^{-4} \Theta \text{ (}^\circ\text{C)}$$

ή με το σωστό πλήθος δεκαδικών ψηφίων,

$$E \text{ (mV)} = 4.02 + 13.4 \times 10^{-4} \Theta \text{ (}^\circ\text{C)}$$

β) Εφαρμογή στις καμπύλες γραμμές

Αν η σχέση μεταξύ των μεταβλητών x και y είναι της γενικής μορφής

$$y = C x^n \quad (\text{I.4})$$

όπου n θετικός ή αρνητικός αριθμός εκτός από το μηδέν και τη μονάδα και C σταθερά ποσότητα, τότε αν τοποθετήσουμε επάνω σε χιλιομετρικό χαρτί τις πειραματικές τιμές παίρνουμε καμπύλη γραμμή.

Αυτή ή καμπύλη γραμμή ανάγεται σε ευθεία ως εξής:

Λογαριθμίζουμε την (I.4).

$$\log y = \log C + n \log x \quad (\text{I.5})$$

Εκτελούμε στην (15) τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

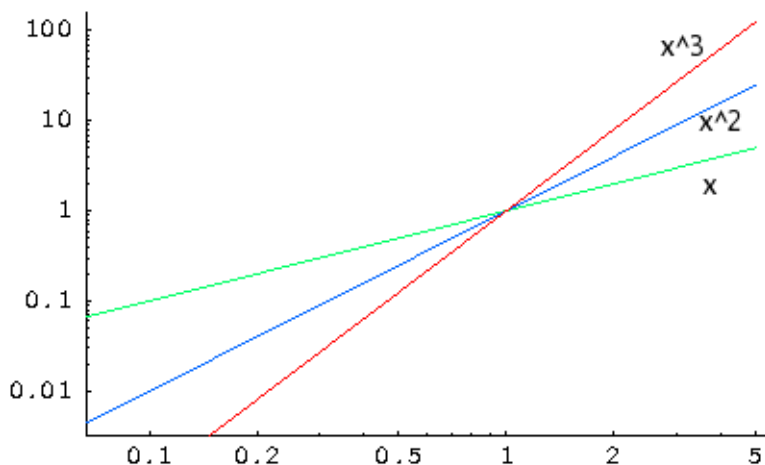
$$\log y = Y \quad \log C = \alpha_0 \quad n = \alpha_1 \quad \log x = X$$

και τελικά παίρνουμε $Y = a_0 + a_1 X$.

Άρα, αν αντί των τιμών x και y χρησιμοποιήσουμε τους λογαρίθμους τους, τότε η καμπύλη των νέων μεταβλητών $Y = \log y$ συναρτήσει του $X = \log x$ σε χλίοστομετρικό χαρτί ανάγεται σε ευθεία με $a_1 = n$ και $a_0 = \log C$.

Για να αποφύγουμε να βρούμε τους λογαρίθμους για κάθε ζευγάρι τιμών χρησιμοποιούμε το *λογαριθμικό χαρτί*. Αυτό έχει τους άξονές του διηρημένους με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε υποδιαίρεση να είναι ανάλογη του λογαρίθμου της ακολουθίας των ακεραίων αριθμών. Η αρχή του λογαριθμικού χαρτιού είναι $x = 10^n$ και $y = 10^m$ (n, m ακέραιοι θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί). Οι κλίμακες των συντεταγμένων είναι διηρημένες σε όμοιες περιοχές που ονομάζονται *περιοχές των λογαριθμικών αξόνων* και καλύπτουν τούς αριθμούς $10^n - 10^{n+1}$, $10^{n+1} - 10^{n+2}$, $10^{n+2} - 10^{n+3}$ κοκ. Η εκλογή των τιμών των περιοχών των αξόνων γίνεται σύμφωνα με τις ανάγκες των πειραματικών τιμών τις οποίες θέλουμε να τοποθετήσουμε. Αν στο πρώτο τμήμα του άξονα αντιστοιχούν τιμές από $0.1 - 1$, το επόμενο είναι $1 - 10$, το μεθεπόμενο $10 - 100$ κοκ.

Στο παρακάτω σχήμα παρατίθεται ένα παράδειγμα διαγράμματος σε log-log χαρτί, μαζί με την γραφική παράσταση διαφόρων συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $y = x^n$ μετασχηματίζεται στους άξονες αυτούς σε ευθεία. Ο άξονας των x περιλαμβάνει 1.5 περιόδους, ενώ ο άξονας των y έχει 5 περιόδους.



Στο εμπόριο υπάρχουν λογαριθμικά χαρτιά με διάφορους συνδυασμούς περιόδων, στην περίπτωση όμως που δεν βρείτε ένα χαρτί να σας εξυπηρετεί, υπάρχουν διαθέσιμες εικόνες τέτοιων χαρτιών στο διαδίκτυο, τις οποίες μπορείτε να εκτυπώσετε και να

χρησιμοποιήσετε. Τα προγράμματα επεξεργασίας φύλλων δεδομένων και τα μαθηματικά πακέτα εφαρμογών γενικότερα έχουν μεγάλη ευελιξία στην κατασκευή γραφικών παραστάσεων.

Αν η σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι της γενικής μορφής

$$y = D e^{kx} \quad (I.6\alpha)$$

ή

$$y = D 10^{kx} \quad (I.6\beta)$$

όπου D και k σταθερές και $e = 2.718$ (η βάση των νεπερίων λογαρίθμων), τότε αν τοποθετήσουμε πάνω σε χιλιοστομετρικό χαρτί τις πειραματικές τιμές παίρνουμε καμπύλη γραμμή. Αυτή ή καμπύλη ανάγεται σε ευθεία ως εξής: Λογαριθμίζουμε την (I.6α)

$$\log y = \log D + \frac{k}{2.303} x \quad (I.7\alpha)$$

ή λογαριθμίζουμε την (I.6β)

$$\ln y = \ln D + k x \quad (I.7\beta)$$

Εκτελούμε στην (I.7α) τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$\log y = Y \quad \log D = \alpha_0 \quad \frac{k}{2.303} = \alpha_1 \quad x = X$$

και στην (I.7β)

$$\log y = Y \quad \log D = \alpha_0 \quad k = \alpha_1 \quad x = X$$

και παίρνουμε

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X$$

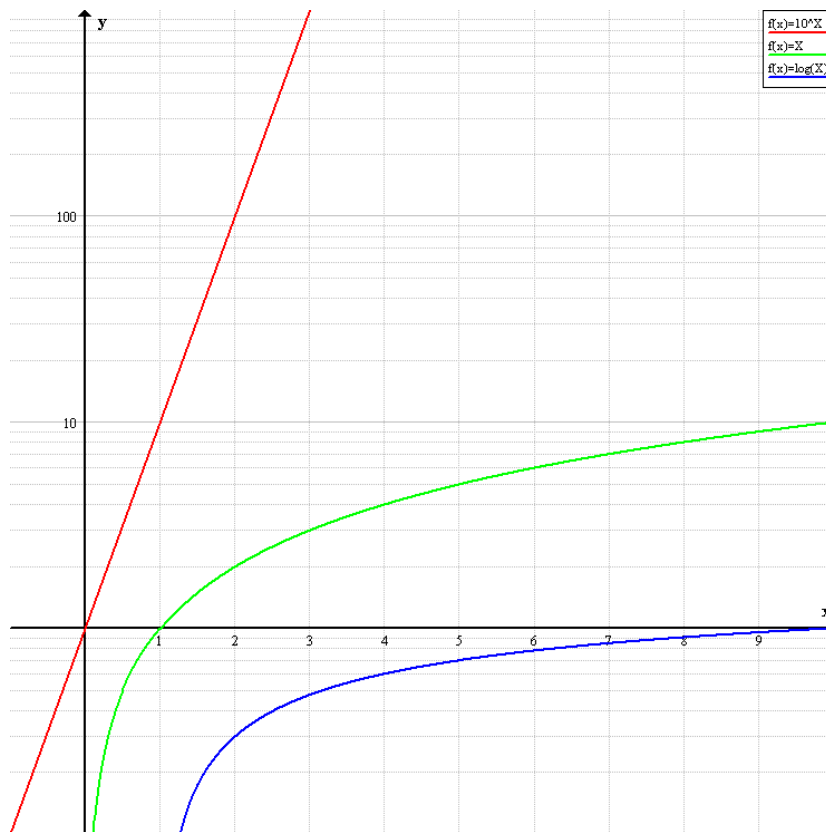
Άρα, αν αντί της τιμής y χρησιμοποιήσουμε το λογάριθμό της, τότε η καμπύλη $Y = \log y$ συναρτήσει του x σε χιλιοστομετρικό χαρτί ανάγεται σε ευθεία με

$$\alpha_1 = \frac{k}{2.303} \quad \text{ή} \quad \alpha_1 = k \quad \text{για την (I.6β) και} \quad \alpha_0 = \log D.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για τη γραφική παράσταση των εξισώσεων I.6α και I.6β ώστε να έχουμε ευθεία γραμμή ένα χαρτί που έχει άξονα

τεταγμένων λογαριθμικό και άξονα τετμημένων χιλιοστομετρικό. Το χαρτί αυτό λέγεται *ημιλογαριθμικό*. Στο παρακάτω σχήμα παρατίθεται ένα παράδειγμα διαγράμματος σε ημιλογαριθμικό χαρτί, μαζί με την γραφική παράσταση διαφόρων συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $y = x$ (μεσαία καμπύλη) μετασχηματίζεται στους άξονες αυτούς σε καμπύλη, ενώ η συνάρτηση $y = 10^x$ (επάνω καμπύλη) μετασχηματίζεται σε ευθεία.

Φυσικά και σε αυτό το χαρτί πρέπει να γίνει κατάλληλη εκλογή των περιοχών στους άξονες ώστε να περιλαμβάνονται όλες οι πειραματικές τιμές (δηλ. οι περιοχές είναι $10^n - 10^{n+1}$, $10^{n+1} - 10^{n+2}$ κοκ.).



Για να σχεδιάσουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων σε ένα τέτοιο διάγραμμα, αρκεί να θεωρήσουμε δύο τυχαία σημεία x_1 και x_2 , και να υπολογίσουμε από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων τα αντίστοιχα Y_1 και Y_2 . Επειδή όμως έχουμε κάνει τον μετασχηματισμό $Y = \log y$, θα πρέπει $y_1 = 10^{Y_1}$ και $y_2 = 10^{Y_2}$. Αν έχουμε κάνει

σωστά τους υπολογισμούς, στο ημιλογαριθμικό διάγραμμα τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) θα ορίζουν μια ευθεία που διέρχεται ανάμεσα από τα πειραματικά σημεία

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και στις περιπτώσεις αυτές, πρέπει να έχουμε όμως τις παραπάνω αντικαταστάσεις στο μυαλό μας.

Στα επόμενα παρουσιάζονται μερικά παραδείγματα επεξεργασίας δεδομένων από περιπτώσεις παρόμοιες με αυτές που θα συναντήσετε στις ασκήσεις του Γενικού Εργαστηρίου.

Παράδειγμα 1.

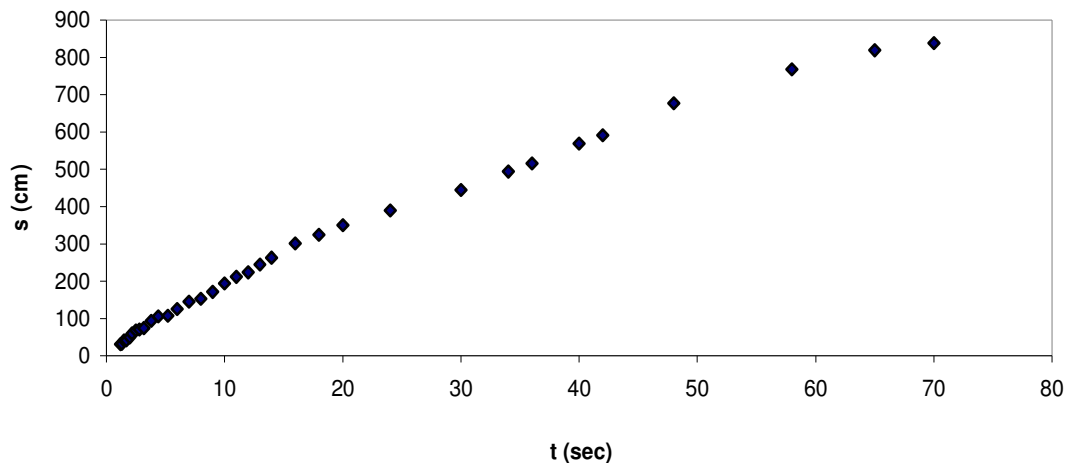
Κατά τη μελέτη της κίνησης ενός σώματος πήραμε τα ζεύγη τιμών του Πίνακα Ι.3:

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι.3: Τιμές θέσης – χρόνου κατά την κίνηση κινητού

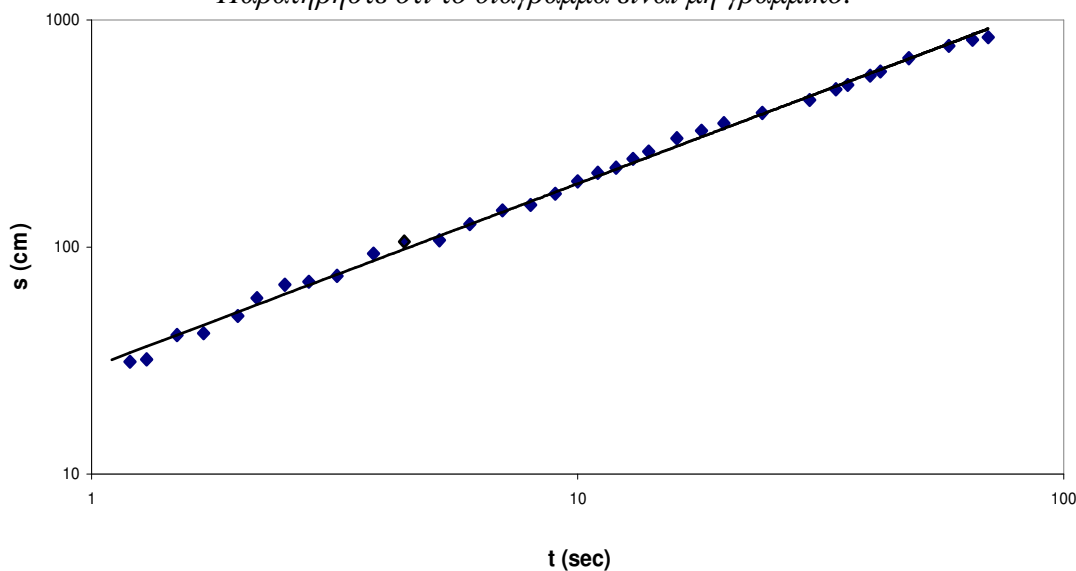
n	x = t (sec)	y = s (cm)	n	x = t (sec)	y = s (cm)	n	x = t (sec)	y = s (cm)
1	1.2	31.3	13	6.0	126.0	25	24.0	389.1
2	1.3	32.0	14	7.0	144.5	26	30.0	444.6
3	1.5	40.9	15	8.0	153.0	27	34.0	494.4
4	1.7	41.6	16	9.0	171.7	28	36.0	516.4
5	2.0	49.8	17	10.0	194.2	29	40.0	568.9
6	2.1	59.6	18	11.0	212.1	30	42.0	591.2
7	2.5	68.2	19	12.0	223.4	31	48.0	677.6
8	2.8	70.3	20	13.0	244.6	32	58.0	768.4
9	3.2	74.6	21	14.0	263.1	33	65.0	818.9
10	3.8	93.3	22	16.0	301.3	34	70.0	838.8
11	4.4	105.4	23	18.0	324.5			
12	5.2	107.2	24	20.0	350.3			

Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης.

Ευθεία γραμμή προκύπτει σε διάγραμμα $\log x - \log y$ όπως φαίνεται στο Σχήμα I.5β, άρα η σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι της γενικής μορφής $y = C x^n$.



Σχήμα I.5α: Διάγραμμα των τιμών του Πίνακα I.3 σε γραμμικούς άξονες.
Παρατηρήστε ότι το διάγραμμα είναι μη γραμμικό.



Σχήμα I.5β: Διάγραμμα των τιμών του Πίνακα I.3 σε λογαριθμικό (log-log) χαρτί.
Παρατηρείστε ότι η γραφική παράσταση είναι γραμμική.

Λογαριθμίζοντας την γενική σχέση $y = C x^n$ παίρνουμε $\log y = n \log x + \log C$

Εκτελούμε τους μετασχηματισμούς $x \rightarrow \log x$ και $y \rightarrow \log y$ προκύπτει η γραμμική σχέση $Y = aX + \beta$ όπου $a = n$ και $\beta = \log C$.

Χρησιμοποιούμε τους τύπους των ελαχίστων τετραγώνων για τους συντελεστές της ευθείας (οι ενδιάμεσοι υπολογισμοί παραλείπονται, υποθέτοντας ότι μπορείτε να τους εκτελέσετε εύκολα με τη βοήθεια Η/Υ) και βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = 0.807660 \pm 0.007834 \text{ και } \beta = 1.470474 \pm 0.008752$$

Επειδή $\beta = \log C$ βρίσκουμε ότι $C = 10^{1.470474} = 29.54432$

Και επειδή $n = \alpha$ βρίσκουμε ότι $n = 0.807660$

Συνεπώς, η εξίσωση που συνδέει τα δύο μεγέθη (χωρίς να συμπεριληφθούν στην επεξεργασία οι αβεβαιότητες των συντελεστών της ευθείας) είναι:

$$s = 29.54432 t^{0.807660}$$

ή με πιο ρεαλιστικό (αλλά αυθαίρετο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων

$$s = 29.544 t^{0.8077}$$

Αν θέλουμε να διατυπώσουμε με πληρότητα το πειραματικό αποτέλεσμα, αλλά και με αιτιολογημένο πλήθος σημαντικών ψηφίων, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις αβεβαιότητες στους συντελεστές της ευθείας. Επίσης πρέπει να έχουμε μελετήσει προηγουμένως το επόμενο κεφάλαιο “Κ. Σημαντικά και κατ’ εκτίμηση ψηφία”.

Όσον αφορά την αβεβαιότητα στον εκθέτη n , επειδή $n \pm \sigma_n = \alpha \pm \sigma_\alpha$, βρίσκουμε ότι $n = 0.807660 \pm 0.007834$. Επειδή το πρώτο σημαντικό ψηφίο του σ_α (το 7) βρίσκεται στο τρίτο του δεκαδικό ψηφίο, κρατάμε τρία μόνο δεκαδικά ψηφία και για το n και για το σ_n και γράφουμε το τελικό αποτέλεσμα σαν **$n = 0.808 \pm 0.008$** . Παρατηρούμε ότι στο προηγούμενο αριθμητικό αποτέλεσμα για το n (κάνοντας χονδρική εκτίμηση των σημαντικών ψηφίων) είχαμε αυθαίρετα κρατήσει τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

Όσον αφορά την αβεβαιότητα στην παράμετρο C , ο υπολογισμός είναι λίγο πιο πολύπλοκος και απαιτεί διάδοση σφαλμάτων. Από την παράγραφο Ε και τον Πίνακα Ε.1, γενική περίπτωση (viii), βλέπουμε ότι όταν είναι $Z = \log A$, τότε η αβεβαιότητα στο Z ισούται με $\Delta Z = \Delta A/A$. Στο παράδειγμά μας είναι $\beta = \log C$ και συνεπώς $\sigma_\beta = \sigma_C/C$. Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο σ_C θα ισούται με $\sigma_\beta \cdot C$ δηλαδή $\sigma_C = \sigma_\beta \cdot C = 0.008752 \cdot 29.54432 = 0.2585719$. Συνολικά, για τον συντελεστή C έχουμε $C = 29.54432 \pm 0.2585719$ και προφανώς όλα τα ψηφία του αποτελέσματος δεν είναι σημαντικά. Επειδή πρέπει σύμφωνα με τον γενικό κανόνα να

κρατήσουμε ένα μόνο σημαντικό ψηφίο για το σ_C , συμπεραίνουμε ότι πρέπει να διατηρήσουμε στο αποτέλεσμα ένα μόνο δεκαδικό ψηφίο. Συνεπώς, το τελικό αποτέλεσμα για το C πρέπει να γραφεί σαν $C = 29.5 \pm 0.3$. Παρατηρούμε ότι και πάλι στον αρχικό υπολογισμό είχαμε κρατήσει αυθαίρετα δύο επιπλέον δεκαδικά ψηφία στην τιμή του C , τα οποία δεν δικαιολογούνται.

Το τελικό αποτέλεσμα διαμορφώνεται σαν $s = (29.5 \pm 0.3) t^{(0.808 \pm 0.008)}$ ή σε απλοποιημένη μορφή χωρίς αβεβαιότητες, αλλά με σωστό και αιτιολογημένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, $s = 29.5 t^{0.808}$

Οι παραπάνω υπολογισμοί μπορεί να φαίνονται κουραστικοί, όμως αποτελούν τον μοναδικό τρόπο για να γραφεί το αποτέλεσμα με πληρότητα και επιστημονική αυστηρότητα.

Στα επόμενα παραδείγματα δεν θα επαναλάβουμε την αυστηρή ανάλυση των αβεβαιοτήτων που έγινε παραπάνω, αλλά θα επισημαίνουμε ότι στο τελικό αποτέλεσμα το πλήθος των σημαντικών ψηφίων είναι αυθαίρετο.

Παράδειγμα 2.

Κατά τη μελέτη της κίνησης ενός σώματος βρίσκουμε τις παρακάτω τιμές.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4: Τιμές ταχύτητας – χρόνου κατά την κίνηση κινητού

$x = t$ (sec)	$y = v$ (cm/sec)	$x = t$ (sec)	$y = v$ (cm/sec)	$x = t$ (sec)	$y = v$ (cm/sec)
0.3	3.6	3.0	13.6	5.5	48.0
0.5	4.2	3.2	14.5	5.7	50.0
0.7	4.4	3.5	18.0	6.0	58.0
1.0	5.0	3.7	18.2	6.2	64.0
1.4	6.4	3.9	21.0	6.5	72.0
1.5	6.5	4.0	22.1	6.7	80.0
1.8	8.5	4.2	25.0	6.9	90.0
2.0	8.1	4.5	27.5	7.0	96.0
2.2	9.0	4.6	30.0		
2.5	10.4	4.8	32.1		
2.7	12.1	5.0	36.6		
2.9	13.0	5.2	39.2		

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το χρόνο.

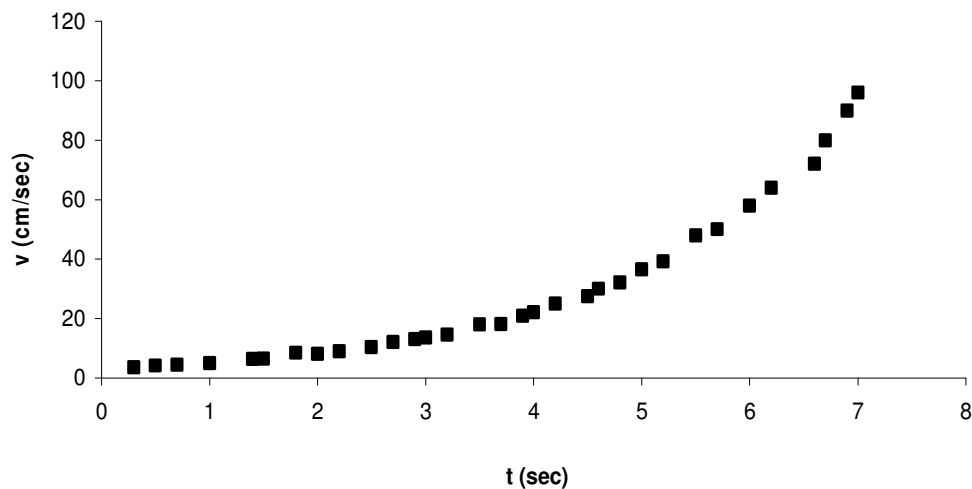
Ευθεία γραμμή προκύπτει σε διάγραμμα $x - \log y$ όπως φαίνεται στο διάγραμμα (2β), άρα η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές είναι της γενικής μορφής $y = De^{kx}$

Για τους συντελεστές της ευθείας χρησιμοποιούμε τους τύπους των ελαχίστων τετραγώνων (παραλείπουμε τους ενδιάμεσους υπολογισμούς, υποθέτοντας ότι μπορούμε να τους εκτελέσουμε εύκολα με τη βοήθεια H/Y):

$$\alpha = \frac{\sum Y_i \cdot \sum X_i^2 - \sum X_i \cdot \sum X_i Y_i}{N \cdot \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{2.3507 \times 10^4 - 2.158 \times 10^4}{1.824 \times 10^4 - 1.430 \times 10^4} = 0.490$$

Επειδή $\alpha = \log C$ βρίσκουμε ότι $C = 24.22$

$$\beta = \frac{N \cdot \sum X_i Y_i - \sum X_i \cdot \sum Y_i}{N \cdot \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} = \frac{5.77 \times 10^3 - 4.93 \times 10^3}{1.824 \times 10^4 - 1.430 \times 10^4} = 0.213$$



Σχήμα 1.6α: Διάγραμμα των τιμών του Πίνακα 1.4 σε γραμμικούς άξονες.

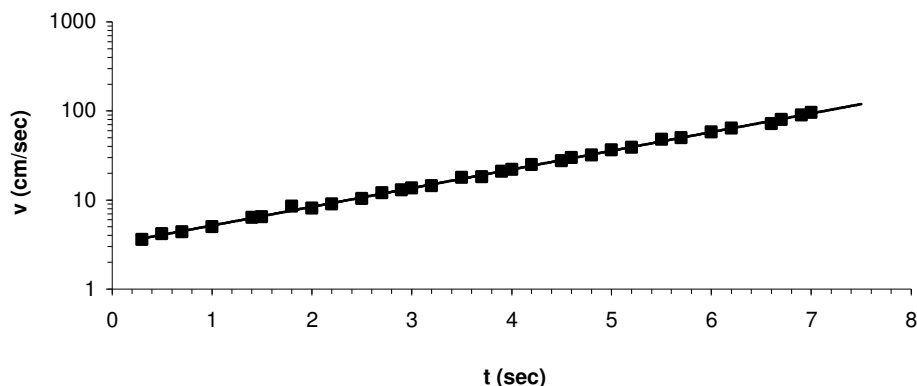
Παρατηρήστε ότι το διάγραμμα είναι μη γραμμικό.

Συνεπώς, η εξίσωση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι:

$$v = 3.089212 \times 10^{0.213 t}.$$

ή με ρεαλιστικότερο (αλλά αυθαίρετο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων

$$v = 3.089212 \times 10^{0.213 t}.$$



Σχήμα I.6b: Διάγραμμα των τιμών του Πίνακα I.4 σε ημιλογαριθμικό (semilog) χαρτί. Παρατηρείστε ότι η γραφική παράσταση είναι γραμμική.

Επειδή $\beta = \frac{k}{2.303}$ από την οποία προκύπτει $k = \beta \cdot 2.302 = 0.490$,

η σχέση που συνδέει τα v και t είναι: $v = 3.089212 \cdot e^{0.490 t}$

ή με ρεαλιστικότερο (αλλά αυθαίρετο) πλήθος δεκαδικών ψηφίων $v = 3.09 \cdot e^{0.49 t}$.

Κ. ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΚΑΙ ΚΑΤ' ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΨΗΦΙΑ

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους με οποιοδήποτε όργανο μας δίνει μια αριθμητική τιμή (δηλ. μια σειρά ψηφίων) την οποία διαβάζουμε είτε πάνω στην κλίμακα ενός αναλογικού οργάνου, είτε απευθείας από ένα ψηφιακό όργανο.

Τα αναλογικά όργανα (π.χ. θερμόμετρο υδραργύρου, χάρακας, αναλογικό χρονόμετρο, ηλεκτρικά όργανα με δείκτη) διαθέτουν μια κλίμακα με χαραγές που χρησιμεύουν για να διαβάζουμε τα ψηφία της μέτρησης. Αυτό σημαίνει πως για οποιαδήποτε παρατήρηση με το ίδιο όργανο υπάρχει η ίδια κοινή βεβαιότητα ότι ο δείκτης έχει περάσει ή όχι μια συγκεκριμένη γραμμή της κλίμακας ή βρίσκεται πάνω σ' αυτήν, οπότε στην περίπτωση αυτή όλες οι μετρήσεις που προέρχονται από το ίδιο όργανο πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Αν ο δείκτης του οργάνου σταματήσει σε ενδιάμεση θέση, δηλ. μεταξύ δύο χαραγών της κλίμακας, τότε το διάστημα μεταξύ της προηγούμενης χαραγής και του δείκτη το υπολογίζουμε κατ' εκτίμηση και το προσθέτουμε στην τιμή που αντιπροσωπεύει η αμέσως προηγούμενη χαραγή. Κατά κανόνα, θεωρούμε πως μπορούμε να εκτιμήσουμε

με ικανοποιητικό βαθμό το μισό της μικρότερης υποδιαίρεσης μιας κλίμακας, όταν οι χαραγές απέχουν μεταξύ τους διάστημα της τάξης του 1 mm. Είναι δυνατό να εκτιμήσουμε και μικρότερο τμήμα, αλλά επειδή αυτό εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κλίμακας και της βελόνας, αφήνεται να ρυθμιστεί κατά περίπτωση. Έτσι προκύπτει πάντα (μετά από δική μας συμφωνία) ένα ψηφίο, το οποίο αντιπροσωπεύει και τη μικρότερη ποσότητα που μπορεί να διαβάσει κανείς σε συγκεκριμένη κλίμακα.

- α) Ο λόγος αυτής προς την μεγαλύτερη τιμή την οποία μπορεί να διαβάσει κανείς (στην ίδια κλίμακα πάντα) εκφρασμένος επί τοις εκατό (%) λέγεται (σχετική) *ακρίβεια ανάγνωσης* της κλίμακας του οργάνου π.χ. 1 Volt στα 100, είναι καθαρός αριθμός και χαρακτηρίζει μόνο την κλίμακά του.
- β) Η φυσική ποσότητα στην οποία αντιστοιχεί η μικρότερη υποδιαίρεση της κλίμακας λέγεται *ακρίβεια του οργάνου* και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες της φυσικής ποσότητας ανά υποδιαίρεση π.χ. σε περιοχή 0 – 1 Volt είναι 0.01 Volt/υποδ.
- γ) Τέλος, η τάξη μεγέθους του φυσικού μεγέθους που αντιστοιχεί στη μικρότερη ένδειξη της κλίμακας του οργάνου χαρακτηρίζει την *ευαισθησία του οργάνου*. Είναι δε φανερό πως αυτή θα αντιστοιχεί σε κάποια δύναμη του 10, θετική ή αρνητική.

Η τάξη μεγέθους (δηλ. η σειρά του ψηφίου στον αριθμό της μετρούμενης ποσότητας) της μικρότερης αυτής ποσότητας καθορίζει και σε ποιο ψηφίο υπάρχει αβεβαιότητα στην ανάγνωση της μέτρησης που παίρνουμε.

Αυτό ακριβώς το ψηφίο το καλούμε *κατ' εκτίμηση*, σε αντιδιαστολή με όσα βρίσκονται αριστερά του, τα οποία καλούμε *σημαντικά*, μια και είμαστε βέβαιοι για την τάξη μεγέθους τους. Έτσι, όταν παραθέσουμε έναν οποιοδήποτε αριθμό που αντιπροσωπεύει μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους, το τελευταίο ψηφίο θεωρείται πάντα κατ' εκτίμηση, είναι δε απαραίτητο να συνοδεύεται και με την ακρίβεια του οργάνου με το οποίο μετρήθηκε, ώστε να παρέχεται πλήρης και σαφής πληροφορία για τα όρια αξιοπιστίας του μέτρου του.

Στα ψηφιακά όργανα μέτρησης τα πράγματα είναι πιο απλά. Λόγω κατασκευής, η αξία του τελευταίου ψηφίου της ένδειξης αποτελεί συγχρόνως και την ευαισθησία του οργάνου, οπότε οι μετρήσεις με το όργανο αυτό θα έχουν αβεβαιότητα τουλάχιστον ίση με το $\frac{1}{2}$ της αξίας του τελευταίου ψηφίου.

Για παράδειγμα, αν ένα ψηφιακό θερμόμετρο αναφέρει την θερμοκρασία περιβάλλοντος σαν $23.0\text{ }^{\circ}\text{C}$, εμείς πρέπει να σημειώσουμε $\theta = 23.00 \pm 0.05\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ακόμα και αν το όργανο δίνει ακέραιες μόνο μετρήσεις, π.χ. $V = 12\text{ Volt}$, εμείς είμαστε υποχρεωμένοι να αναφέρουμε ότι $V = 12.0 \pm 0.5\text{ Volt}$. Με άλλα λόγια, οι πειραματικές τιμές 12, 12.0, 12.00 και 12.000 δεν θεωρούνται ίσες μεταξύ τους στην πειραματική φυσική. Με το ίδιο σκεπτικό, οι μετρήσεις από αναλογικό όργανο πρέπει να έχουν πάντοτε το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ανεξάρτητα από το αν ο δείκτης του οργάνου συμπίπτει με τις υποδιαίρεσεις της κλίμακας ή όχι.

Ας θεωρήσουμε τώρα την απλούστερη περίπτωση της μέτρησης ενός μήκους με συνηθισμένο χάρακα βαθμονομημένο σε mm, ο οποίος θεωρούμε ότι έχει τυπικό σφάλμα ανάγνωσης (αβεβαιότητα) ίσο με το $\frac{1}{2}$ της ελάχιστης υποδιαίρεσης της κλίμακας, δηλαδή 0.05 cm . Το ορθό και με πληρότητα διατυπωμένο αποτέλεσμα μέτρησης του πλάτους μιας σελίδας χαρτιού φωτοτυπίας μεγέθους A4 ($21.0 \times 29.7\text{ cm}$) είναι δεν είναι ούτε $L = 21\text{ cm}$, όπως θα ισχυριζόταν ένας αρχάριος πειραματιστής (διότι το αποτέλεσμα δεν συνοδεύεται από αβεβαιότητα στην μέτρηση), ούτε $L = 21 \pm 0.05\text{ cm}$ (ασυνεπής χρήση δεκαδικών ψηφίων), αλλά $L = 21.00 \pm 0.05\text{ cm}$. Στην τελευταία αυτή έκφραση η ένδειξη του χάρακα αναφέρεται με το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων όπως και η αβεβαιότητα. Ένα αποτέλεσμα της μορφής $L = 21\text{ cm}$ υπονοεί ότι η αμέσως μεγαλύτερη μέτρηση που μπορεί να δώσει ο συγκεκριμένος χάρακας είναι $L' = 22\text{ cm}$, υποβαθμίζοντας την πολύ λεπτομερέστερη (σε mm) διαβάθμιση του οργάνου.

Για τον καθορισμό του πλήθους των σημαντικών (και δεκαδικών) ψηφίων που έχουν νόημα κατά την αναγραφή πειραματικών αποτελεσμάτων, οι επόμενοι δύο κανόνες έχουν γενική ισχύ:

- Οι μετρήσεις που προέρχονται από το ίδιο όργανο μέτρησης (είτε αναλογικό, είτε ψηφιακό) ή την ίδια πειραματική διάταξη πρέπει να έχουν όλες το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.
- Στην τελική έκφραση ενός πειραματικού αποτελέσματος, η αριθμητική τιμή $\pm$ το τυπικό σφάλμα, ανεξάρτητα αν πρόκειται για μεμονωμένη μέτρηση, σειρά επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, ή αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων, πρέπει να έχουν το ίδιο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Στην πράξη, η απόφαση σχετικά με το πόσα δεκαδικά ψηφία έχουν φυσικό νόημα (είναι σημαντικά) στην αναφορά ενός αποτελέσματος, εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της αβεβαιότητας, της διακριτικής ικανότητας ή του τυπικού σφάλματος στον μέσο όρο.

Παράδειγμα 1: Από την επεξεργασία 13 επαναλαμβανόμενων μετρήσεων ενός φυσικού μεγέθους προέκυψαν τα εξής αριθμητικά αποτελέσματα από τον υπολογιστή:

Μέσος όρος = 10.28363076 (10 ψηφία) και τυπ. απόκλιση M.O.= 0.0471954765 (10 ψηφία)

Με πόσα ψηφία πρέπει να γράψουμε το αποτέλεσμα;

Απάντηση: Την τυπική απόκλιση δεν είναι δυνατόν να την γνωρίζουμε με 10 σημαντικά ψηφία, δηλαδή ακρίβεια $1:10^{10}$. Στην στατιστική αποδεικνύεται ότι από λιγότερες από 30 μετρήσεις, δηλαδή στο περιβάλλον ενός διδακτικού εργαστηρίου, είναι δυνατόν να έχουμε μόνο περίπου 10% αξιοπιστία στον προσδιορισμό του σφάλματος (ή της τυπικής απόκλισης), δηλαδή $10\% = (10 \text{ στα } 100) = (1 \text{ στα } 10) = \underline{1 \text{ σημαντικό ψηφίο}}$.

Συνεπώς, στο αριθμητικό μας παράδειγμα, πρέπει να διατηρήσουμε στην τυπική απόκλιση ένα μόνο σημαντικό ψηφίο (αρχίζοντας από αριστερά συναντάμε το **4**) και αν χρειάζεται το στρογγυλεύουμε (στην περίπτωση μας στρογγυλεύουμε προς το **5**). Συνεπώς για την τυπ. απόκλιση γράφουμε $\sigma_m = \mathbf{0.05}$. Επειδή τώρα το **5** βρίσκεται στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, πρέπει να διατηρήσουμε μόνο 2 δεκαδικά ψηφία από τον μέσο όρο. Συνολικά πρέπει να γράψουμε το αποτέλεσμα σαν $\mathbf{x = 10.28 \pm 0.05}$.

Εξαίρεση στον γενικό αυτό κανόνα αποτελεί η περίπτωση το πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος να είναι η μονάδα (1). Στην περίπτωση αυτή διατηρούμε ένα επιπλέον ψηφίο, δηλαδή συνολικά δύο σημαντικά ψηφία. Αν διατηρούσαμε μόνο ένα σημαντικό ψηφίο, η αμέσως επόμενη τιμή από το 1 είναι το 2, που θα αντιστοιχούσε σε 100% αύξηση στην αβεβαιότητα, πράγμα που δεν αντιπροσωπεύει την πραγματικότητα.

Παράδειγμα 2: $345.238675 \pm 2.245786 \rightarrow 345 \pm 2$ (δεν δικαιολογούνται καθόλου δεκαδικά ψηφία!)

Παράδειγμα 3: $0.0455 \pm 0.0138 \rightarrow 0.045 \pm 0.014$ (2 σημαντικά ψηφία λόγω της εξαίρεσης).

Η ορθή, πλήρης και συνεπής αναφορά του πλήθους των ψηφίων στα τελικά πειραματικά αποτελέσματα αποτελεί μια από τις βασικές δεξιότητες του πειραματικού επιστήμονα. Στα πλαίσια του μαθήματος του Γενικού Εργαστηρίου Φυσικής ελπίζεται ότι θα σας δοθούν τα πρώτα ερεθίσματα προς την σωστή κατεύθυνση.

Α. Η ΣΥΝΤΑΞΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Μετά την ολοκλήρωση ενός πειράματος, ο πειραματιστής δημοσιεύει τα αποτελέσματα της δουλειάς του σε επιστημονικά περιοδικά μετά από διαδικασία κρίσης. Ελέγχεται κατά πόσο η εργασία είναι πρωτότυπη (δεν αντιγράφει άλλους), αν αναγνωρίζει το τι είναι ήδη γνωστό (το παρελθόν), αν διατυπώνει με σαφήνεια την υπόθεση προς επαλήθευση ή το πρόβλημα προς επίλυση (το παρόν), αν πείθει για την ποιότητα της πειραματικής διαδικασίας και των αποτελεσμάτων της, αν εξάγει τεκμηριωμένα συμπεράσματα και αν περιέχει προεκτάσεις/προτάσεις χρήσιμες για το μέλλον. Η εργασία γίνεται δεκτή αν είναι επιστημονικά άρτια (“τι επιδίωκε; τι βρήκε; πού βασίζεται; τι επιχειρήματα έχει;”) και αξιολογή (“βρήκε κάτι χρήσιμο ή σημαντικό;”).

Η ανάλογη διαδικασία στα πλαίσια των φοιτητικών εργαστηρίων είναι η σύνταξη της εργαστηριακής αναφοράς. Η διόρθωσή της από τον διδάσκοντα αποσκοπεί στο να σας βοηθήσει προς την σωστή κατεύθυνση. Στο Γενικό Εργαστήριο θα κάνετε απλά τα πρώτα βήματα – χρειάζεται εμπειρία αρκετών εξαμήνων πειραματικής εργασίας ώστε να χειρίζεστε με άνεση τον γραπτό επιστημονικό λόγο. Ακολουθούν μερικές διευκρινίσεις και υποθέσεις που πρέπει να έχετε κατά νου, οι οποίες παρατίθενται από το γενικό προς το ειδικό. Επισημαίνονται πρώτα οι γενικότερες αρχές (η φιλοσοφία και η ουσία της εργασίας), οι οποίες στη συνέχεια εξειδικεύονται στο περιεχόμενο και τις τυπικές και τεχνικές απαιτήσεις της εργασίας.

Α.1 Η ‘φιλοσοφία’ της εργαστηριακής αναφοράς.

Το εργαστήριο προωθεί τον διάλογο και την συνεργασία, αλλά η μάθηση είναι ατομική υπόθεση: Παρόλο που τα πειραματικά δεδομένα είναι κοινά για την διμελή ομάδα, και για την παραγωγή τους συνεργαστήκατε και συζητήσατε με τους συναδέλφους σας, η συγγραφή της εργασίας είναι ατομική υπόθεση και αποσκοπεί στην εξάσκησή σας στον γραπτό επιστημονικό λόγο, συμπεριλαμβανομένων και των δεξιοτήτων γραφικής και στατιστικής επεξεργασίας των δεδομένων.

Το εργαστήριο δεν αποτελεί βαρετή επιβεβαίωση των νόμων της Φυσικής. Παρόλο που τα πειράματα του συγκεκριμένου εργαστηρίου πραγματοποιούνται στα πλαίσια ενός διδακτικού (και όχι ερευνητικού) εργαστηρίου και έχουν όχι ανακαλυπτικό αλλά επιβεβαιωτικό χαρακτήρα, είναι ο μόνος τρόπος με βάση ένα πειραματικό σενάριο να αναπτύξετε την δεξιότητα περιγραφής ενός πειράματος με βάση την πάγια (ερευνητική) επιστημονική πρακτική του κύκλου: *περιγράψω το τί είναι ήδη γνωστό, φαντάζομαι και προβλέπω τι περιμένω να παρατηρήσω σε μια νέα πειραματική κατάσταση, πειραματίζομαι, επεξεργάζομαι, συμπεραίνω (επιβεβαιώνω ή απορρίπτω τις υποθέσεις μου), προτείνω βελτιώσεις και μελλοντικά πειράματα.* Ο σκοπός του εργαστηρίου δεν είναι να βρείτε το σωστό (και λίγο-πολύ γνωστό εκ των προτέρων) αποτέλεσμα, αλλά να εξοικειωθείτε με τις διαδικασίες και την επιχειρηματολογία της πειραματικής φυσικής.

Αξιοπιστία: Δεν θα πείσει κανέναν αν αναφέρετε ένα πειραματικό αποτέλεσμα με 5 σημαντικά ψηφία. Η αξιοπιστία του πειράματός σας απέναντι σε τρίτους εξαρτάται κύρια από το αν πείθετε τον αναγνώστη ότι έχετε εντοπίσει τα προβληματικά σημεία της διάταξης ή της μεθόδου που εισάγουν αβεβαιότητα στην διαδικασία μέτρησης (τροποποιητικές-παρεμβαλλόμενες εισόδους). Επιδιώξτε να βρείτε έναν τρόπο να παραθέσετε μία *ποσοτική* εκτίμηση του κατά πόσον αυτά επηρεάζουν το αποτέλεσμα της μέτρησης και πιθανούς τρόπους/τεχνικές για να αποφευχθούν.

Ένα πείραμα δεν τελειώνει ποτέ: Στο τέλος της εργασίας σας είναι καλό να αναλογίζεστε την όλη την διαδικασία του πειράματος και να ‘προεκτείνετε’ την πραγματικότητα σκεπτόμενοι με όρους ‘*τι θα γινόταν αν...*’, ‘*πώς θα επηρεαζόταν το πείραμα αν...*’. Η εργασία που προτείνει ουσιαστικές και αιτιολογημένες βελτιώσεις στην πειραματική διάταξη ή την μεθοδολογία της άσκησης είναι και αυτή που θα ξεχωρίσει από τις υπόλοιπες.

Γενική οδηγία: Μην περιορίζετε σε αυτά μόνο που σας ζητούνται. Προσπαθήστε να αυτοσχεδιάσετε και να εκφράσετε την προσωπική σας άποψη στην εργασία επιπλέον της τυπικής και καθιερωμένης. Οι πρόσθετες αυτές λεπτομέρειες και η πετυχημένη ένταξη στην εργασία της προσωπικής σας άποψης σας απομακρύνουν από τον μέσο όρο των τυπικών εργασιών που περιέχουν τα ελάχιστα δυνατά από όσα ζητούνται.

Α2. Η ουσία της εργαστηριακής αναφοράς.

Κατά την συγγραφή της εργασίας το σκεπτικό σας πρέπει να είναι: Ο αναγνώστης

της εργασίας γνωρίζει Φυσική, αλλά θέλει να μάθει:

Τις υποθέσεις σας: Σε ποια *θεωρία* στηριχτήκατε και ποιες παραδοχές ή προσεγγίσεις έγιναν για την εφαρμογή της στις συγκεκριμένες πειραματικές συνθήκες.

Τα γεγονότα: *Τί* κάνατε στο Εργαστήριο. *Πώς* το κάνατε (με ποια όργανα και ποιες διατάξεις). *Τι είδους μετρήσεις* πήρατε και με ποιο σκοπό.

Την στρατηγική: *Γιατί* κάνατε όσα κάνατε (ποια ήταν η στρατηγική σας και ποιος ο πειραματικός σχεδιασμός για να επιτευχθούν οι στόχοι εκτέλεσης του πειράματος).

Την επεξεργασία: *Τί* υπολογίσατε και *πώς* (ποια ήταν η θεωρία ανάλυσης των δεδομένων)

Τα αποτελέσματα: Σε ποια *αποτελέσματα* οδηγηθήκατε (τι καινούριο βρήκατε, αν και κατά πόσο συμφωνεί το πείραμα με τη θεωρία κλπ.)

Τα συμπεράσματα: Ποια είναι τα γενικά *συμπεράσματα* που εξάγετε και που στηρίζονται αυτά. Ποια *προβλήματα* συναντήσατε στο πείραμα (όργανα, συνθήκες). Πόσο *αξιόπιστα* είναι τα συμπεράσματα (κατά πόσο μπορούν να σταθούν χρήσιμα σε έναν τρίτο).

Το μέλλον: *Τί* χρειάζεται να επανασχεδιαστεί σε μια επόμενη προσπάθεια, ώστε να λυθούν προβλήματα και να βελτιωθούν τα αποτελέσματα.

Θυμηθείτε: Το πείραμα φαινομενικά έχει μεν ‘αντικειμενικά’ αποτελέσματα (τις μετρήσεις), αλλά αυτές προέκυψαν από δικές σας επιλογές και υπό συγκεκριμένες συνθήκες, ενώ τα συμπεράσματα είναι δικά σας (υποκειμενικά) και δεν συμφωνούν αναγκαστικά με αυτά του αναγνώστη. Συνεπώς πρέπει να τον πείσετε για όσα υποστηρίζετε, τεκμηριώνοντας και επιχειρηματολογώντας.

Α.3. Δομή και περιεχόμενο της εργασίας.

Η δομή μιας επιστημονικής εργασίας είναι λίγο-πολύ καθιερωμένη στις φυσικές επιστήμες και περιλαμβάνει τα εξής ‘κεφάλαια’:

Περίληψη. Αποτελεί έναν σύντομο πρόλογο της εργασίας, που περιλαμβάνει τον σκοπό του πειράματος, τις μεθόδους μέτρησης που χρησιμοποιήθηκαν, επιλεγμένα αποτελέσματα (συνήθως το τελικό αποτέλεσμα) και επιλεγμένα συμπεράσματα. Στα πλαίσια του εργαστηρίου τυπικά είναι 15–20 γραμμές.

Σύντομη θεωρητική εισαγωγή. Χωρίς να επαναλαμβάνετε το εργαστηριακό βιβλίο, χρειάζεται να παραθέσετε τα στοιχεία θεωρίας και πειραματικής μεθοδολογίας που χρειάζονται ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει ποιο είναι το θεωρητικό πλαίσιο και οι παραδοχές ή πρακτικοί περιορισμοί με βάση τα οποία προσεγγίζεται το συγκεκριμένο φαινόμενο μέσα στο εργαστήριο.

Περιγραφή των πειραμάτων που κάνατε και σύντομη **απαρίθμηση** και αν είναι απαραίτητο, **περιγραφή των σημαντικών χαρακτηριστικών οργάνων** και διατάξεων που χρησιμοποιήσατε. Η χρήση κατάλληλων και συνοπτικών σχημάτων βοηθάει σημαντικά την κατανόηση από τον αναγνώστη. Η περιγραφή αυτή στην ουσία αποτελεί περίληψη των αντίστοιχων παραγράφων του εργαστηριακού οδηγού, χωρίς όμως όλες τις λεπτομέρειες και επεξηγήσεις. Έχει μοναδικό σκοπό να αντιληφθεί ο αναγνώστης τι είχατε στη διάθεσή σας και πώς το αξιοποιήσατε.

Πειραματική εργασία. Σύντομη περιγραφή της πειραματικής εργασίας. Οποσδήποτε περιλαμβάνει πίνακες μετρήσεων των πρωτογενών δεδομένων. Αν η επεξεργασία των δεδομένων είναι σύντομη και δεν διακόπτει την ροή, μπορείτε να την κάνετε στη φάση αυτή με πίνακες αποτελεσμάτων. Διαγράμματα.

Επιμέρους και συνολικά αποτελέσματα. Αυτά είναι καλό να παρατίθενται σε Πίνακες και σε καλά οργανωμένους υπολογισμούς.

Συμπεράσματα. Πρέπει να αναφέρετε τα τελικά σας συμπεράσματα και να παραθέσετε τα επιχειρήματά σας σχετικά με την ακρίβεια και την πιστότητα των αποτελεσμάτων. Να συζητήσετε αν επιτεύχθηκε συμφωνία θεωρίας - πειράματος. Να περιγράψετε τις πιθανές πηγές σφαλμάτων και την επίδραση τους (συστηματική ή τυχαία) στο τελικό αποτέλεσμα. Να περιγράψετε την επίδραση των αρχικών συνθηκών (παραμέτρων) και ενδεχόμενων μεταβολών τους στα πειραματικά αποτελέσματα.

Ελεύθερα σχόλια. Τα μέχρι στιγμής εξασφαλίζουν ότι η εργασία είναι απλά μια πλήρης, σαφής και κατανοητή από τον αναγνώστη εργασία. Αυτά αποτελούν την ελάχιστες προϋποθέσεις ώστε η εργασία να γίνει αποδεκτή από τον διδάσκοντα. Η προσωπική όμως γνώμη σας ως πειραματιστή και η αντικειμενική και ολοκληρωμένη αξιολόγηση της προσπάθειας σας ολοκληρώνουν την εικόνα μιας καλής εργασίας.

Βιβλιογραφία. Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσατε και άλλες πηγές εκτός από το εργαστηριακό βιβλίο, π.χ. επιστημονικά άρθρα, βιβλία θεωρίας ή άλλες πηγές (άρθρα,

φωτογραφίες ή σχήματα) από το διαδίκτυο, πρέπει οπωσδήποτε να τις αναφέρετε στο τέλος της εργασίας.

Λ.4. Οι τυπικές προδιαγραφές της εργασίας.

Την ακριβή μορφή με την οποία ο διδάσκων σας επιθυμεί να παρουσιάζετε τις εργαστηριακές σας αναφορές θα σας το περιγράψει ο ίδιος στα πρώτα εργαστήρια.

Οι συνήθεις τυπικές προδιαγραφές μιας εργασίας είναι οι εξής:

Είτε η εργασία είναι χειρόγραφη, είτε είναι γραμμένη σε Η/Υ, πρέπει να υπάρχει ένα εξώφυλλο που να περιλαμβάνει το ονοματεπώνυμό σας, το εργαστηριακό τμήμα και την ημερομηνία διεξαγωγής της άσκησης.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κόλλες αναφοράς γραμμένες από τη μία πλευρά ή σελίδες Α4 τυπωμένες σε σχετικά αραιό διάστιχο (π.χ. 18 στιγμών για γραμματοσειρά 12 στιγμών).

Σκεφτείτε από πριν και οργανώστε όχι μόνο το “τι έχω να γράψω”, αλλά και το “τι δεν χρειάζεται να επαναλάβω από το βιβλίο”, με βάση τις προηγούμενες γενικές οδηγίες.

Η εργασία πρέπει να είναι δομημένη σε σαφείς και διακριτές παραγράφους (όχι σαν ένα ενιαίο κείμενο χωρίς δομή).

Τα πρωτογενή ή επεξεργασμένα δεδομένα πρέπει να παρουσιάζονται σε πίνακες, με λατινική αρίθμηση (I, II, III κλπ.) και συμπεριλαμβάνουν τίτλο (λεζάντα) που τοποθετείται πάνω από αυτούς. Οι λεζάντες πρέπει να έχουν μια σύντομη ποιοτική περιγραφή του περιεχομένου τους, και να μην είναι απλώς μια γραμμή του τύπου “Πίνακας 2”. Για συγκεκριμένα παραδείγματα, παρατηρείστε τον τρόπο με τον οποίο παρατίθενται οι Πίνακες στα παραδείγματα των προηγούμενων Κεφαλαίων.

Τα σχήματα, διαγράμματα και οι γραφικές παραστάσεις πρέπει να είναι μεγάλα και καθαρά (τουλάχιστον το 70-80%) του πλάτους της σελίδας και να έχουν περιγραφικές λεζάντες με αραβική αρίθμηση (1, 2, 3) που τοποθετούνται κάτω από τα σχήματα. Και πάλι, παρατηρείστε τα σχήματα στα προηγούμενα Κεφάλαια (αλλά και σε όλο τον εργαστηριακό οδηγό). Η λεζάντα των διαγραμμάτων πολλές φορές μπορεί να περιέχει επεξηγηματικό κείμενο που βοηθάει τον αναγνώστη να αναγνωρίσει συγκεκριμένα τμήματα της γραφικής παράστασης.

Τα τελικά σας αποτελέσματα είναι καλό να ξεχωρίζουν σε πλαίσιο.

Όλοι οι πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις, τα αριθμητικά ενδιάμεσα και τελικά αποτελέσματα πρέπει να συνοδεύονται από τις αντίστοιχες μονάδες μέτρησης. Αυτές καλό είναι να είναι συμβατές με διεθνές σύστημα μονάδων SI.

Τέλος οι προτάσεις που χρησιμοποιείτε πρέπει να είναι μικρές και περιεκτικές, ενώ τα ρήματα που χρησιμοποιείτε να είναι σε χρόνο αόριστο σε όλη την έκταση της εργασίας.

Συμπερασματικά:

Η συγγραφή της εργαστηριακής αναφοράς είναι προσωπική υπόθεση και αποσκοπεί αποκλειστικά στην δική σας καλλιέργεια. Οι σχετικές δεξιότητες και τεχνικές απαιτούν χρόνο και κόπο για να τελειοποιηθούν, πράγμα που δεν γίνεται με μόνο ένα εξάμηνο εργαστηριακής ενασχόλησης με το μάθημα του Γενικού Εργαστηρίου. Είναι όμως απαραίτητες και θα σας σταθούν χρήσιμες για όλα τα υπόλοιπα εργαστηριακά μαθήματα του προπτυχιακού (αλλά και του μεταπτυχιακού) προγράμματος σπουδών. Κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου οι διδάσκοντες του μαθήματος θα διορθώνουν κάθε σας εργασία σύμφωνα με τις δικές τους απαιτήσεις και θα σας δίνουν συνεχώς ανάδραση προκειμένου να βελτιώσετε τις γνώσεις και τις επιδόσεις σας.

ΑΣΚΗΣΗ

*Εφαρμογής Θεωρίας Σφαλμάτων
με βολές επί Στόχου σε περιβάλλον δικτύου Η/Υ*

Αρχική μελέτη – ανάπτυξη: Α. Πάλλας

Αρχική ανάπτυξη λογισμικού και επιμέλεια κειμένου: Δ. Ευαγγελινός

Προσαρμογή λογισμικού σε PC: Κ. Λιακάκης

ΑΣΚΗΣΗ ΒΟΛΩΝ ΕΠΙ ΣΤΟΧΟΥ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΙΚΤΥΟΥ Η/Υ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Σκοποί της δραστηριότητας

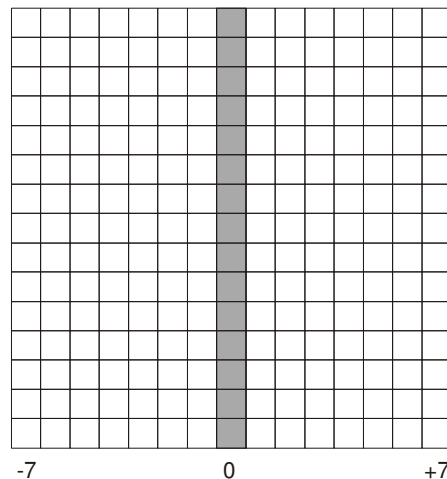
Σκοποί της εργαστηριακής αυτής επίδειξης είναι:

- να εισαχθεί η έννοια της *κατανομής μετρήσεων* μέσα από ένα πείραμα
- να εποπτικοποιηθούν οι στατιστικές έννοιες του *δείγματος μετρήσεων*, της *τυπικής απόκλισης δείγματος*, του *μέσου όρου* και της *τυπικής απόκλισης στον μέσο όρο*.
- να εισαχθεί η φυσική έννοια της *ποιότητας μετρήσεων*
- να εποπτικοποιηθούν οι έννοιες των *συστηματικών και τυχαίων σφαλμάτων*

2. Η πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από έναν φωτοευαίσθητο στόχο, ένα όπλο λέιζερ και έναν Η/Υ συνδεδεμένο με τον στόχο.

Ο στόχος αποτελείται από 225 φωτοευαίσθητους αισθητήρες, οργανωμένους σε 15 γραμμές και 15 στήλες (βλ. διπλανό σχήμα). Όταν η δέσμη λέιζερ από το όπλο χτυπήσει έναν αισθητήρα, τότε ο Η/Υ καταγράφει μία μέτρηση ως συντεταγμένες (x, y) και απεικονίζει στην οθόνη του το σημείο στο οποίο επιτεύχθηκε η βολή.



Το πρόγραμμα του Η/Υ έχει την δυνατότητα να ανιχνεύει, να αποθηκεύει, να επεξεργάζεται στατιστικά τις μετρήσεις και να παρουσιάζει τα αποτελέσματα.

Για τους σκοπούς της άσκησης ο στόχος είναι χωρισμένος σε 15 κατακόρυφες ισοπαχείς ταινίες. Η κεντρική ταινία αποτελεί το κέντρο του στόχου και αντιστοιχεί σε μέτρηση ίση με το μηδέν ($x = 0$), ενώ οι πλευρικές ταινίες αντιστοιχούν σε μετρήσεις από $x = -7$ έως μετρήσεις $x = +7$.

Με την διάταξη του Στόχου προσομοιώνεται η πειραματική διαδικασία όσον αφορά την λήψη επαναλαμβανόμενων μετρήσεων, σύμφωνα με τις εξής αναλογίες.

- Μία τυχαία βολή-μέτρηση είναι ένας αριθμός στο διάστημα $(-7, +7)$. Η διαδικασία της σκόπευσης έχει σαν σκοπό τον προσδιορισμό της πραγματικής τιμής $x = 0$, η οποία αντιστοιχεί και στο πραγματικό σημείο σκόπευσης του σκοπευτή.
- Μια πραγματοποιούμενη βολή-μέτρηση είναι πιθανόν να απέχει από την πραγματική τιμή και να οδηγεί σε απόκλιση των βολών από την πραγματική τιμή, δηλ. σε σφάλμα μέτρησης.
- Το σφάλμα μέτρησης είναι δυνατόν να οφείλεται σε μία ή περισσότερες πηγές σφαλμάτων, όπως η δεξιότητα του πειραματιζόμενου (σκοπευτή), το όπλο ή οι πειραματικές συνθήκες κατά την εκτέλεση των βολών.
- Η σκοπευτική ικανότητα ενός σκοπευτή αντιστοιχεί σε ένα μέτρο της ποιότητας των βολών. Ένα πεπερασμένο σύνολο βολών (π.χ. $N=30$) αντιπροσωπεύει ένα δείγμα από τον δειγματικό χώρο των απείρων βολών τις οποίες εν δυνάμει ο σκοπευτής είναι σε θέση να πραγματοποιήσει.
- Ο προσδιορισμός της σκοπευτικής ικανότητας πρέπει να λαμβάνει υπόψη του το σύνολο των βολών που μπορεί να πραγματοποιήσει ο σκοπευτής (και όχι μόνο το δείγμα N βολών που είναι γνωστό) και πρέπει να περιλαμβάνει τον υπολογισμό ενός μέτρου θέσης των βολών και ενός μέτρου της διασποράς των βολών.
- Σκοπός της στατιστικής επεξεργασίας των μετρήσεων είναι να συνάγει με επαγωγικό τρόπο την σκοπευτική ικανότητα του σκοπευτή (που αντιστοιχεί σε $N \rightarrow \infty$ βολές) από τις συγκεκριμένες N βολές τις οποίες πραγματοποίησε.
- Τα στάδια της στατιστικής επεξεργασίας είναι α) να μοντελοποιήσει τις N βολές σαν ένα υποσύνολο του συνολικού δειγματοχώρου των απείρων βολών β) να προσδιορίσει ένα μέτρο θέσης και ένα μέτρο διασποράς για τις N βολές και γ) από τα χαρακτηριστικά του δείγματος να συμπεράνει την σκοπευτική ικανότητα του σκοπευτή και το διάστημα εμπιστοσύνης του προσδιορισμού αυτού.

- Η στατιστική επεξεργασία των μετρήσεων θα αναδείξει το εάν η σκοπευτική ικανότητα περιλαμβάνει τυχαίο ή συστηματικό σφάλμα, αν δηλαδή ο σκοπευτής έχει τάση συστηματικής απόκλισης προς τα αριστερά ή δεξιά.

3. Πειραματική διαδικασία

Στην άσκηση, κάθε φοιτητής εκάστου τμήματος θα εκτελέσει 3-5 βολές σύμφωνα με τις οδηγίες του διδάσκοντα, ώστε να συμπληρωθούν 30–50 βολές. Παράλληλα, σύμφωνα με τις οδηγίες του Διδάσκοντα, μπορεί να συμπληρωθεί ένα φύλλο εργασίας πριν και ένα μετά την συμπλήρωση των βολών από όλο το τμήμα. Στο τέλος της δραστηριότητας, αν υπάρχει χρόνος, μπορεί να συμπληρωθεί ένα μικρό ερωτηματολόγιο αξιολόγησης για το σύνολο της ύλης του πρώτου θεωρητικού εργαστηρίου.

B. ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

B1. Πριν από την διεξαγωγή των βολών

1. Κάλυψη του στόχου και κατανομή των βολών

Τα βασικά χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τους σκοπευτές μεταξύ τους είναι η *ευθυβολία* και η *σταθερότητα*. Με *ευθυβολία* εννοούμε την ικανότητα του σκοπευτή να εκτελεί βολές οι οποίες να πετυχαίνουν τον στόχο τον οποίο αυτός σκοπεύει με το όπλο του, δηλαδή την ικανότητα να “πετυχαίνει τον στόχο του”. Παράγοντες που επηρεάζουν την ευθυβολία είναι η εξάσκηση του σκοπευτή, η γνώση των χαρακτηριστικών και του χειρισμού του όπλου, η ικανότητα του να διορθώνει τυχόν αποκλίσεις στο στόχαστρο, η γνώση των παραγόντων που προκαλούν απόκλιση από τον στόχο (π.χ. απόσταση, άνεμος) κλπ. Με *σταθερότητα* εννοούμε την ικανότητα του σκοπευτή να μπορεί να εκτελεί διαδοχικές βολές οι οποίες βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη. Παράγοντες που επηρεάζουν την σταθερότητα είναι ο βαθμός κόπωσης του σκοπευτή, το βάρος του όπλου, η ψυχολογική του κατάσταση, ο βαθμός αυτοσυγκέντρωσης κλπ.

Η ευθυβολία είναι ένα μέτρο της θέσης των βολών, ενώ η σταθερότητα είναι μέτρο της διασποράς των βολών μεταξύ τους.

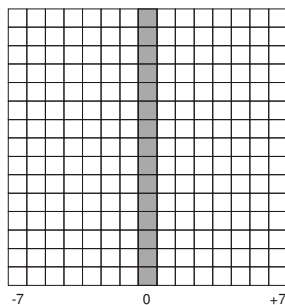
➤ Στο καθένα από τα επόμενα διαγράμματα σας ζητείται να προβλέψετε και να σχεδιάσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους την εικόνα που αναμένετε να παρουσιάζουν περίπου $N=30$ βολές για τέσσερις αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις σκοπευτών και όπλων. Στο αριστερό μέρος σας ζητείται να σχεδιάσετε την *κάλυψη του στόχου*, δηλαδή να γραμμοσκιάσετε τα τετραγωνάκια τα οποία προβλέπετε ότι θα ‘χτυπηθούν’ από τις βολές για κάθε περίπτωση σκοπευτή.

Στο δεξί μέρος σας ζητείται να σχεδιάσετε την αντίστοιχη *κατανομή των βολών*, δηλαδή την γραφική παράσταση του πλήθους των βολών συναρτήσει της απόστασης των βολών από το κέντρο του στόχου. Για το διάγραμμα αυτό αρκεί να φανταστείτε τις προβολές των βολών στον άξονα των x και να εκτιμήσετε το πλήθος των βολών για κάθε απόσταση από το κέντρο του στόχου. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζετε το ιστόγραμμα των βολών.

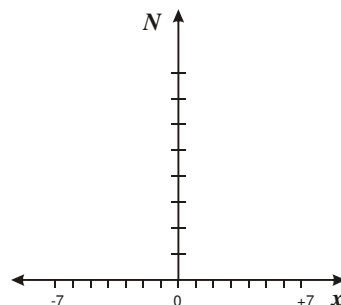
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ Ι: *Κάλυψη του στόχου και κατανομή των βολών*

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α: *Να αναπαραστήσετε ~30 βολές πεπειραμένου σκοπευτή με μεγάλη σταθερότητα και ευθυβολία στις βολές του.*

Κάλυψη του στόχου

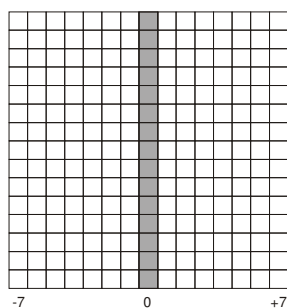


Κατανομή των βολών

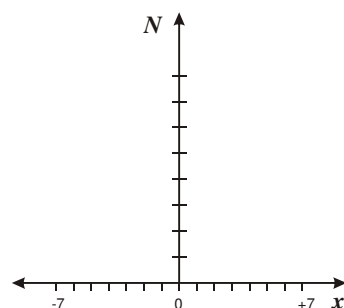


ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β: Να αναπαραστήσετε ~30 βολές σκοπευτή με εξαιρετική σταθερότητα αλλά μια μικρή τάση να ρίχνει τις βολές αριστερότερα από το κέντρο.

Κάλυψη του στόχου

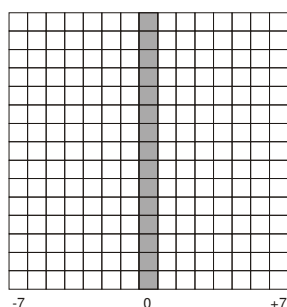


Κατανομή των βολών

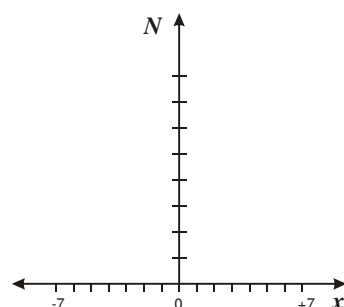


ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ: Να αναπαραστήσετε ~30 βολές σκοπευτή με μικρή σταθερότητα και μια τάση να ρίχνει τις βολές πολύ δεξιότερα από το κέντρο.

Κάλυψη του στόχου

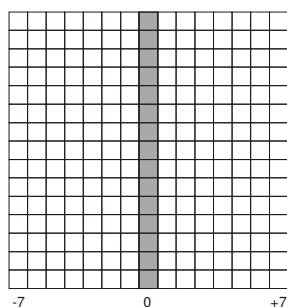


Κατανομή των βολών

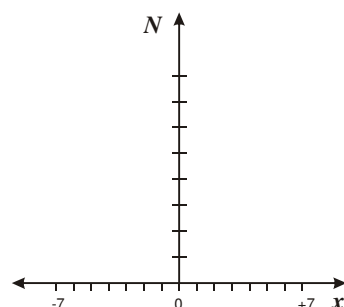


ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Δ: Να αναπαραστήσετε ~30 βολές αρχάριου σκοπευτή.

Κάλυψη του στόχου



Κατανομή των βολών



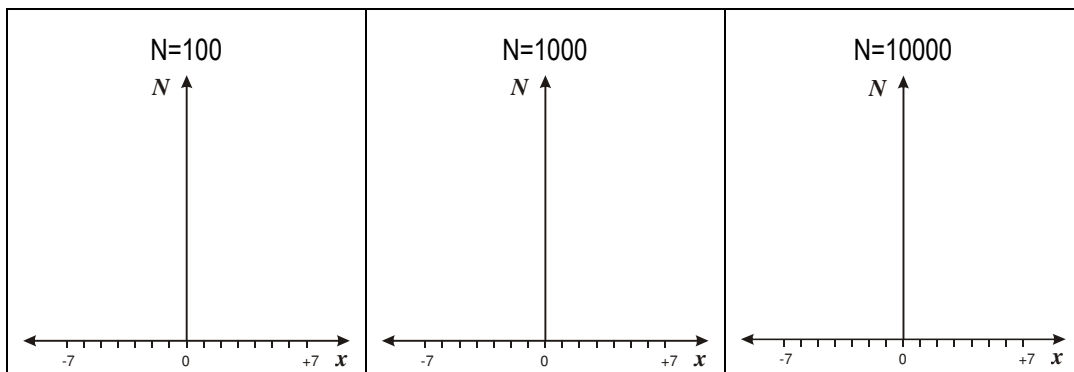
2. Ποιοτική περιγραφή των χαρακτηριστικών των βολών

- ✎ Περιγράψτε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του καλού σκοπευτή σε σχέση με αυτά ενός αρχάριου και πώς αυτά αντικατοπτρίζονται στα διαγράμματα κάλυψης και κατανομής των βολών. Συζητήστε τα χαρακτηριστικά αυτά με τον διδάσκοντα.

B2. Μετά από την διεξαγωγή των βολών

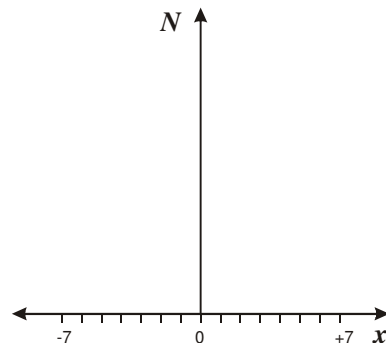
1. Ποσοτική περιγραφή των χαρακτηριστικών των βολών

- ✎ Με βάση τα προηγούμενα διαγράμματα κατανομής των βολών, σχεδιάστε χονδρικά την αναμενόμενη κατανομή βολών για αυξανόμενο πλήθος βολών $N=100, 1000, 10000$ για έναν πεπειραμένο σκοπευτή.



- ✎ Σε τι μοιάζουν και σε τι διαφέρουν οι τρεις αυτές κατανομές;
- ✎ Πώς ονομάζεται το μέτρο της διασποράς των μετρήσεων (βολών) και πώς υπολογίζεται αυτό;

- ✎ Σχεδιάστε την μορφή που αναμένετε να έχει η κατανομή αυτή στην περίπτωση απείρων βολών σε στόχο που έχει συνεχή διαβάθμιση αποστάσεων, δηλαδή όταν το x δεν έχει 15 διακριτές τιμές αλλά ανήκει στο διάστημα των πραγματικών αριθμών $[-7, +7]$.



Η κατανομή την οποία σχεδιάσατε πρέπει να έχει την μορφή της κατανομής Gauss: συμμετρική ως προς τον μέσο όρο, ασυμπτωτικά να τείνει προς το μηδέν, και με σημεία καμπής στο $\pm\sigma$, όπου σ είναι η τυπική απόκλιση του συνόλου των μετρήσεων.

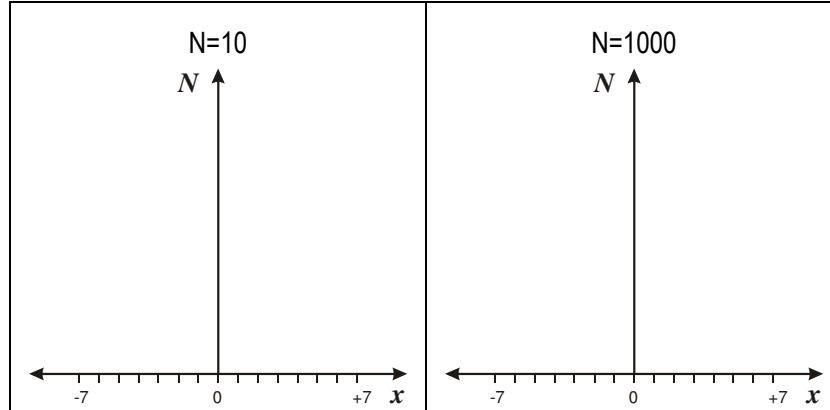
Στην περίπτωση που έχετε μικρό πλήθος μετρήσεων ($1 < N < 5$), ή μετρήσεις με μεγάλη διασπορά, η τυπική απόκλιση του συνόλου των μετρήσεων (σ) είναι το κατάλληλο μέγεθος για την σύνοψη των πειραματικών αποτελεσμάτων. Εφόσον η κατανομή από την οποία προέρχονται οι μετρήσεις είναι κατανομή Gauss, τότε στην περιοχή ($\bar{x} \pm \sigma$) αναμένεται να βρίσκεται το 68% περίπου του συνόλου των μετρήσεων, ανεξάρτητα από το πλήθος των μετρήσεων που έχετε λάβει.

Σύμφωνα με την θεωρία δειγματοληψίας, μόνο όταν έχετε μεγάλο πλήθος μετρήσεων, π.χ. $N > 10$, ή όταν οι μετρήσεις έχουν μικρή διασπορά ($< 10\%$), έχει αξιοπιστία η έννοια του μέσου όρου των μετρήσεων, διότι οι μέσοι όροι κάθε ενδεχόμενης δεκάδας μετρήσεων αναμένεται να είναι παραπλήσιοι.

Το μέγεθος της τυπικής απόκλισης στον μέσο όρο σ_μ εκφράζει την αναμενόμενη διασπορά των μέσων όρων όλων των πιθανών N-άδων μετρήσεων που είναι δυνατόν να προκύψουν. Το σ_μ εξαρτάται από το πλήθος των μετρήσεων N , και μάλιστα μειώνεται όσο αυξάνεται το πλήθος των μετρήσεων κατά τον παράγοντα $\sqrt{N}$. Η φυσική σημασία της έκφρασης $\bar{x} \pm \sigma_\mu$ είναι η εξής: μέσα στην περιοχή αυτή, που προσδιορίστηκε από μία μόνο N-άδα μετρήσεων, αναμένεται ότι θα βρίσκεται το 68% των μέσων όρων όλων των δυνατών N-άδων μετρήσεων που θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν. Εναλλακτικά, η περιοχή $\bar{x} \pm \sigma_\mu$ αποτελεί μία αξιόπιστη κατά 68% πρόβλεψη της θέσης του μέσου όρου μιας N-άδας μετρήσεων.

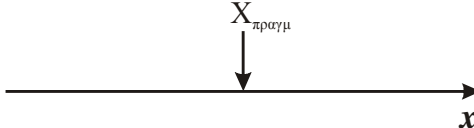
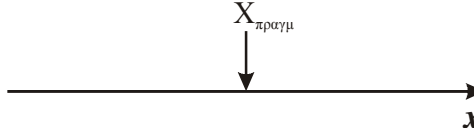
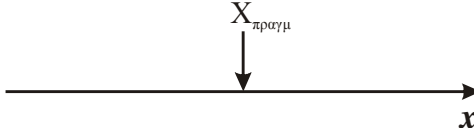
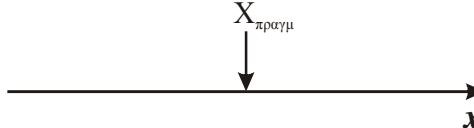
✎ Με βάση τα παραπάνω, προβλέψτε την θέση του μέσου όρου πολλών δειγμάτων μεγέθους N , για τις περιπτώσεις $N = 10$ και $N = 1000$ για έναν πεπειραμένο σκοπευτή ($\bar{x} \equiv 0$), σχεδιάζοντας μικρές γραμμές πάνω στον άξονα των x για κάθε περίπτωση.

Θα πρέπει στο δεύτερο διάγραμμα να σχεδιάσατε το εύρος τιμών των μέσων όρων (το εύρος της περιοχής που καλύπτουν οι μικρές γραμμές που σχεδιάσατε) να είναι περίπου το $1/10$ (δηλαδή το $1/\sqrt{100}$) του πρώτου διαγράμματος, διότι στην δεύτερη περίπτωση έχετε 100 φορές μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος από το πρώτο.



Το βασικό χρηστικό συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι για να κάνετε τις μετρήσεις σας πιο ακριβείς κατά ένα δεκαδικό ψηφίο, πρέπει να πάρετε εκατονταπλάσιες μετρήσεις! Συνεπώς δεν συμφέρει πρακτικά να βελτιώνουμε την ακρίβεια των μετρήσεων, εφόσον μπορούμε να την βελτιώσουμε με άλλους τρόπους, π.χ. με βελτίωση της σταθερότητας των συνθηκών μέτρησης ή απομόνωση του συστήματος από πηγές πειραματικού θορύβου.

- ✎ Στα επόμενα σας ζητείται να δώσετε παραδείγματα μετρήσεων για διάφορες περιπτώσεις σφαλμάτων, με κουκίδες πάνω στους άξονες να αναπαριστούν τις μετρήσεις.

A. Σχεδιάστε ~10 μετρήσεις με μικρά τυχαία και μικρά συστηματικά σφάλματα 	B. Σχεδιάστε ~10 μετρήσεις με μεγάλα τυχαία και μεγάλα συστηματικά σφάλματα 
Γ. Σχεδιάστε ~10 μετρήσεις με μεγάλα τυχαία και μικρά συστηματικά σφάλματα 	Δ. Σχεδιάστε ~10 μετρήσεις με μικρά τυχαία σφάλματα και μεγάλα συστηματικά σφάλματα 

Συζητήστε στην ομάδα σας και με τον διδάσκοντα τις μορφές των γραφικών παραστάσεων.

- ✎ Σχεδιάστε προσεγγιστικά (με το χέρι) τις αντίστοιχες κατανομές μετρήσεων από τις οποίες θα μπορούσαν να είχαν προέλθει οι 10 μετρήσεις που σχεδιάσατε στην προηγούμενη ερώτηση.
- ✎ Αν διαθέτατε τους αντίστοιχους πίνακες μετρήσεων για τις 10 μετρήσεις της καθεμιάς από τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις και ένα πρόγραμμα H/Y σχεδιασμού μαθηματικών συναρτήσεων, θα μπορούσατε να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις που σχεδιάσατε παραπάνω, με χρήση του προγράμματος αυτού; Ποιοι τύποι της Θεωρίας Σφαλμάτων θα σας χρειαστούν;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Χρήση του Προγράμματος Η/Υ “Στόχος”

1. Εισαγωγή

Σε κάθε εργαστηριακή αίθουσα, η συσκευή του στόχου είναι συνδεδεμένη με τον κεντρικό Η/Υ του Διδάσκοντα, στον οποίο εκτελείται το νέο πρόγραμμα λήψης και επεξεργασίας μετρήσεων. Από τον υπολογιστή της θέσης εργασίας τους, με την χρήση καταλλήλου προγράμματος διαμοιρασμού της οθόνης του Η/Υ του διδάσκοντα, οι φοιτητές βλέπουν την ίδια εικόνα με αυτήν του κεντρικού Η/Υ ¹.

Η άσκηση του Στόχου διεξάγεται με την χρήση των εξής προγραμμάτων, όπως στον παρακάτω Πίνακα:

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ
Στόχος (Target)	Λήψη και επεξεργασία μετρήσεων από τον Στόχο	Διδάσκοντα
PC-Duo Client	Διακομιστής της εικόνας της οθόνης του Η/Υ του Διδάσκοντα προς τις οθόνες των υπολογιστών των 8 θέσεων εργασίας.	Διδάσκοντα
PC-Duo Control	Πρόγραμμα λήψης της εικόνας από την οθόνη του Η/Υ του Διδάσκοντα	Φοιτητών

2. Εκτέλεση της Άσκησης**2.1 Προετοιμασία*****Θέση Εργασίας Διδάσκοντα:***

¹ Η λειτουργία διανομής της εικόνας του κεντρικού Η/Υ είναι ανεξάρτητη από το είδος του προγράμματος που εκτελείται από τον Διδάσκοντα. Μία εφαρμογή της λειτουργίας αυτής θα μπορούσε να είναι μία παρουσίαση PowerPoint από τον Διδάσκοντα την οποία παρακολουθούν οι φοιτητές από την θέση εργασίας τους, ή η εκτέλεση οποιοδήποτε προγράμματος.

Στη θέση εργασίας του διδάσκοντα πρέπει να εκτελεστεί το πρόγραμμα “Στόχος” (Target) και να δοθεί τροφοδοσία στο τροφοδοτικό του Στόχου (βρίσκεται προσαρμοσμένος στον τοίχο, κοντά στον Στόχο).

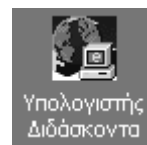
Το πρόγραμμα έχει σαν εικονίδιο έναν Στόχο:



Το πρόγραμμα PC-Duo Client τρέχει αυτόματα με την εκκίνηση του Η/Υ.

Θέσεις Εργασίας Φοιτητών:

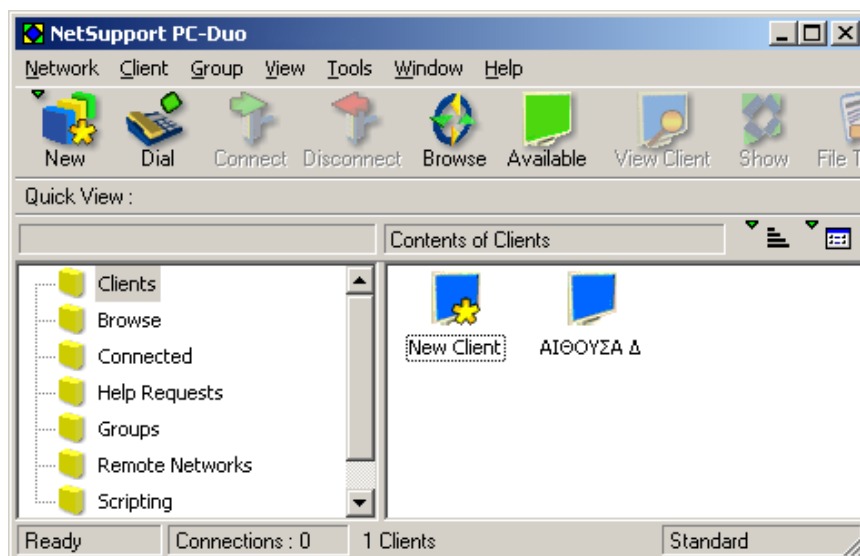
Ανοίξτε τον υπολογιστή της θέσης εργασίας σας. Αναζητείστε στην επιφάνεια εργασίας το εικονίδιο “Υπολογιστής Διδάσκοντα” (εικονίζεται στο διπλανό σχήμα) και κάντε διπλό κλικ σε αυτό.



Εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο επιλογής υπολογιστή:

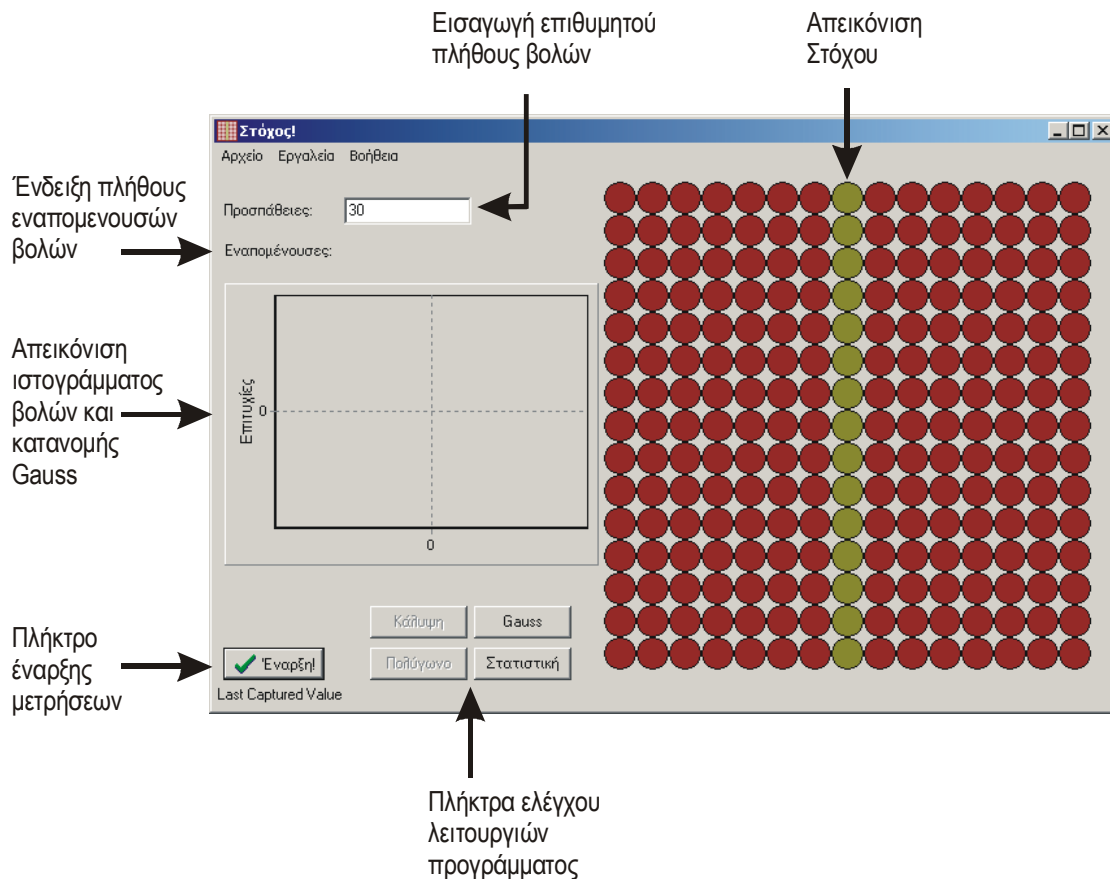
Ανάλογα με την εργαστηριακή αίθουσα (Α, Δ ή Ζ), εμφανίζεται το αντίστοιχο εικονίδιο Η/Υ του Διδάσκοντα (στο παράδειγμα, ο Η/Υ της Αίθουσας Δ).

Εκτελώντας διπλό κλικ στο εικονίδιο αυτό, οι φοιτητές άμεσα βλέπουν την ίδια εικόνα με αυτή του Η/Υ του διδάσκοντα. Προφανώς το παράθυρο αυτό πρέπει να μεγιστοποιηθεί (maximize) ώστε να βλέπετε ολόκληρη την οθόνη του Η/Υ του διδάσκοντα.



2.2 Περιγραφή του προγράμματος “Στόχος”

Η κύρια οθόνη του προγράμματος περιλαμβάνει τα εξής:



2.3 Διεξαγωγή πειράματος βολών

- Ο διδάσκων εισάγει το επιθυμητό πλήθος μετρήσεων (συνήθως περίπου 30, δύο βολές ανά φοιτητή).
- Ο διδάσκων πατάει το πλήκτρο έναρξης μετρήσεων “Start”. Κάθε (επιτυχημένη) βολή εμφανίζεται στην αντίστοιχη περιοχή του Στόχου και απεικονίζεται στην περιοχή Ιστογράμματος.
- Η διαδικασία λήψης μετρήσεων μπορεί να διακοπεί οποιαδήποτε στιγμή (πριν να συμπληρωθεί το πλήθος των προεπιλεγμένων μετρήσεων) πατώντας το πλήκτρο **Διακοπή**.

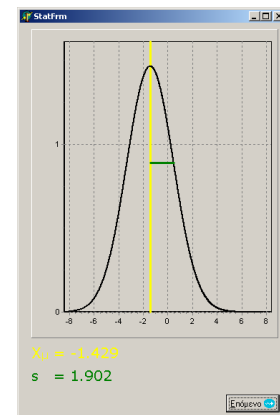
- Όταν συμπληρωθούν οι προεπιλεγμένες μετρήσεις, ο διδάσκων μπορεί να προχωρήσει στην επεξεργασία των μετρήσεων.

2.4 Επεξεργασία των μετρήσεων

Κάλυψη	Με το πλήκτρο Κάλυψη απεικονίζεται η κάλυψη του στόχου, δηλαδή τα σημεία στα οποία έχουν επιτευχθεί επιτυχημένες βολές.
Πολύγωνο	Με το πλήκτρο Πολύγωνο απεικονίζεται το Πολύγωνο Συχνοτήτων αντί του ιστογράμματος Συχνοτήτων.
Gauss	Με το πλήκτρο Gauss ενεργοποιείται η καμπύλη Gauss η οποία προκύπτει από τον μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του συνόλου των μετρήσεων
Στατιστική	Με το πλήκτρο Στατιστική ανοίγει ένα νέο παράθυρο που αφορά την στατιστική περιγραφή του συνόλου των μετρήσεων.

Το παράθυρο που ανοίγει με το πλήκτρο **Στατιστική** απεικονίζει την ίδια κατανομή Gauss η οποία εμφανίζεται επάνω στο ιστόγραμμα του κυρίου παραθύρου μετρήσεων, συν τις τιμές των στατιστικών παραμέτρων του μέσου όρου (ΜΟ) $\bar{X}_\mu$ και της τυπικής απόκλισης s του συνόλου των μετρήσεων.

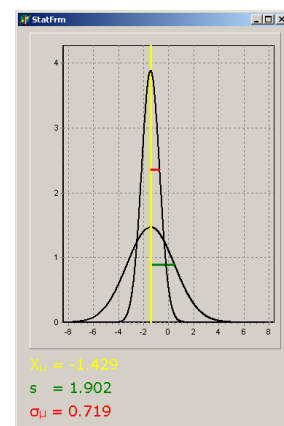
Η θέση του ΜΟ σημειώνεται με κίτρινο χρώμα, ενώ με πράσινο σημειώνεται η φυσική σημασία της s σαν το εύρος της κατανομής στο σημείο καμπής της Γκαουσιανής του συνόλου των μετρήσεων.



Από την γραφική αυτή παράσταση με το πλήκτρο **Επόμενο** εμφανίζεται η γραφική παράσταση που αφορά την στατιστική περιγραφή του ΜΟ, δηλαδή την κατανομή των ΜΟ.

Στην γραφική παράσταση σημειώνονται οι παράμετροι του προηγούμενου σχήματος συν την τιμή της τυπικής απόκλισης στον μέσο όρο σ_μ .

Με κόκκινο χρώμα σημειώνεται η τιμή της σ_μ και η φυσική της σημασία σαν το σαν το εύρος της κατανομής στο σημείο καμπής της Γκαουσιανής των μέσων όρων από υποθετικές ομάδες μετρήσεων.



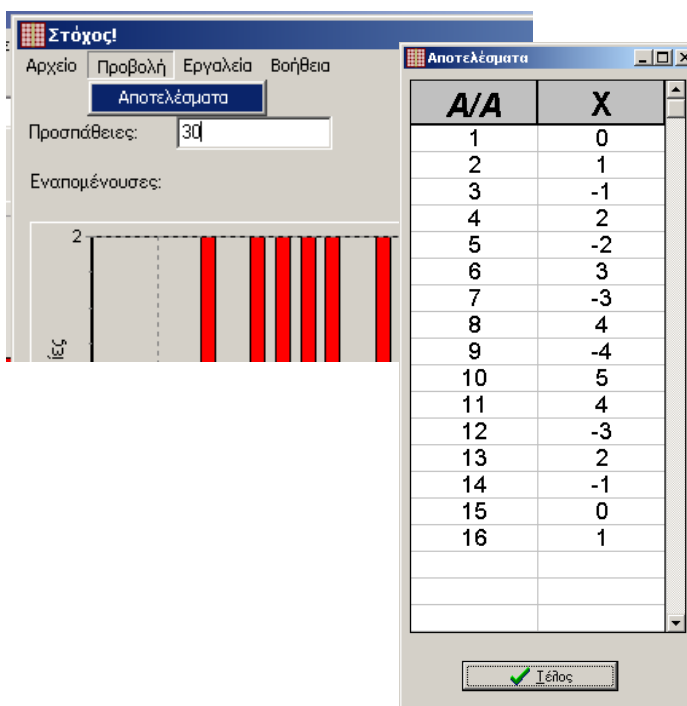
Χρηστική παρατήρηση: Τα δύο αυτά παράθυρα της στατιστικής επεξεργασίας έχουν σχεδιαστεί ώστε να επιτρέπουν την τοποθέτηση δίπλα-δίπλα, ώστε να διευκολύνεται η επισημάνση των διαφορών μεταξύ της προέλευσης, της σημασίας και του σχήματος των δύο κατανομών Gauss καθώς και των τιμών των s και σ_μ .

Για επιστροφή στο παράθυρο των Κυρίων Επιλογών, στο οποίο δεν έχετε πρόσβαση κατά την επίδειξη της στατιστικής επεξεργασίας, χρειάζεται απλώς να κλείσουν τα παράθυρα της στατιστικής επεξεργασίας.

2.5. Παρουσίαση πίνακα μετρήσεων

Από το μενού **Προβολή**, με την επιλογή **Αποτελέσματα**, παρουσιάζεται ο Πίνακας των βολών (μετρήσεων).

Από τον Πίνακα αυτό επιλέγονται οι μετρήσεις τις οποίες θα επεξεργαστείτε στην εργασία σας.



2.6 Συμπληρωματικές λειτουργίες

Από το Μενού **Αρχεία** προβλέπεται λειτουργία αποθήκευσης των μετρήσεων (στον σκληρό δίσκο του Η/Υ του διδάσκοντα ή σε δισκέτα/memory stick των φοιτητών) καθώς και λειτουργία ανάκλησης προηγούμενων μετρήσεων προς επεξεργασία ή επίδειξη.

Μία εφαρμογή της λειτουργίας ανάκλησης θα μπορούσε να είναι π.χ. η προετοιμασία από τον διδάσκοντα αρχείων βολών με μικρή ή μεγάλη διασπορά, τα οποία παρουσιάζονται, επεξεργάζονται στατιστικά και σχολιάζονται μέσα στο εργαστήριο.

3. Τέλος της Άσκησης

Οι φοιτητές κλείνουν το πρόγραμμα λήψης εικόνας από τον Η/Υ του διδάσκοντα και στη συνέχεια κλείνουν τον υπολογιστή τους από το Μενού **Start – Shut down** των Windows και φυσικά όχι από το πλήκτρο ON-OFF του υπολογιστή. Επίσης κλείνουν και την οθόνη του Η/Υ.

Ο διδάσκων κλείνει το πρόγραμμα, το τροφοδοτικό του στόχου, και τον υπολογιστή.

ΑΣΚΗΣΗ

*Εφαρμογής Θεωρίας Ελαχίστων Τετραγώνων
στον Νόμο του Ohm*

Μελέτη – ανάπτυξη: Δ. Ευαγγελινός

|

|

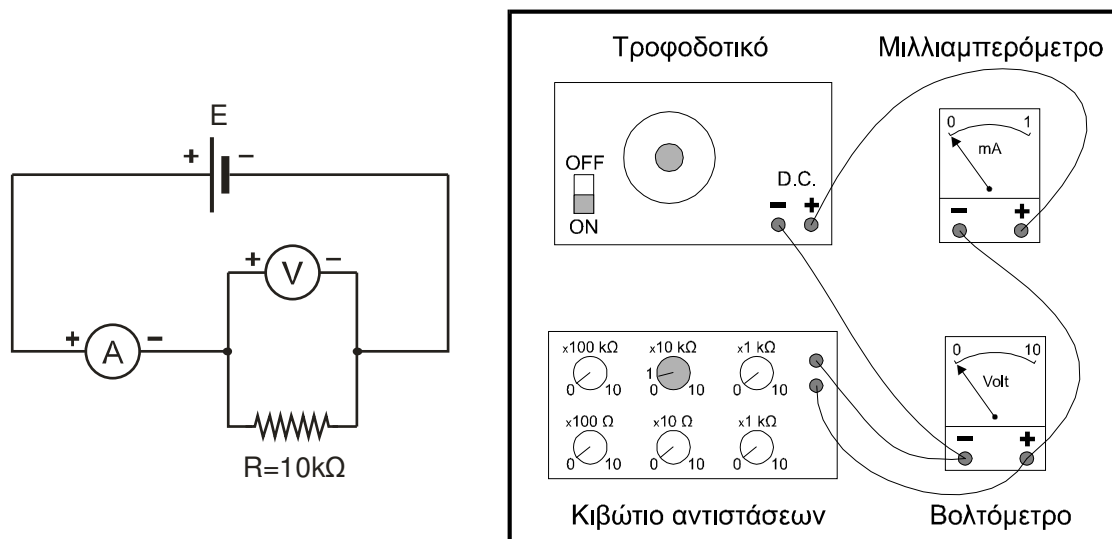
ΑΣΚΗΣΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΣΤΟΝ ΝΟΜΟ ΤΟΥ ΟΗΜ

ΣΚΟΠΟΣ: Επιβεβαίωση του νόμου του Ohm και μέτρηση αντίστασης από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

ΟΡΓΑΝΑ: Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0-10 Volts, βολτόμετρο πλήρους κλίμακας 10 Volts, μιλλιαμπερόμετρο πλήρους κλίμακας 1 mA, αντίσταση 10 KΩ από κιβώτιο αντιστάσεων. (Προαιρετικά χαρτί μιλλιμετρέ.)

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ

Α. ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ Κατασκευάζουμε το κύκλωμα του παρακάτω Σχήματος 1:



Σχήμα 1. Το κύκλωμα της άσκησης σε συμβολική και σχηματική αναπαράσταση.

Το κύκλωμα αποτελείται από τα εξής όργανα:

1. Τροφοδοτικό συνεχούς και εναλλασσόμενης τάσης 0-12 Volt περίπου. Οι ενδείξεις τάσης που παρέχει το συγκεκριμένο τροφοδοτικό είναι ενδεικτικές, δηλαδή κατά προσέγγιση. Ο σκοπός του συγκεκριμένου τροφοδοτικού είναι να απλά να υποκαταστήσει την χρήση μπαταριών και όχι να παρέχει ακριβείς τιμές τάσεις. Γι’

αυτό το ονομάζουμε απλά “τροφοδοτικό” και όχι “πηγή τάσης”. Την ακριβή τιμή της παρεχόμενης τάσης την μετράμε με το βολτόμετρο.

2. Μιλλιαμπερόμετρο συνεχούς ρεύματος, πλήρους κλίμακας 1 mA. Το όργανο έχει πολικότητα (δηλαδή θετικό και αρνητικό ακροδέκτη και δεν πρέπει να συνδέεται ανάστροφα).
3. Βολτόμετρο συνεχής τάσης πλήρους κλίμακας 10 Volt (η κλίμακα των βολτομέτρων που χρησιμοποιούμε στο Γενικό Εργαστήριο) συνήθως αναγράφει “100” αλλά στην πραγματικότητα πρόκειται για 10 Volt πλήρους κλίμακας). Το βολτόμετρο επίσης έχει πολικότητα και δεν πρέπει να συνδέεται ανάστροφα.
4. Δεκαδικό κιβώτιο αντιστάσεων έξι περιοχών. Περιέχει έξι περιστροφικούς διακόπτες συνδεδεμένους σε σειρά, ο καθένας από τους οποίους συνδέει μία από δέκα αντιστάσεις ακριβείας 1% στο κύκλωμα, με αποτέλεσμα στους ακροδέκτες εξόδου να εμφανίζεται αντίσταση ίση με το άθροισμα των επί μέρους επιλεγμένων τιμών. Επιλογή της τιμής “0” σε έναν διακόπτη σημαίνει ότι δεν παρεμβάλλεται αντίσταση, δηλαδή ότι $R = 0$. Συνεπώς, αν όλοι οι περιστροφικοί διακόπτες τοποθετηθούν στην θέση μηδενός, το κιβώτιο παρουσιάζει αμελητέα αντίσταση, όπως ένας απλός αγωγός σύνδεσης

Σημεία ιδιαίτερης προσοχής:

1. Το τροφοδοτικό πρέπει αρχικά να είναι κλειστό (στη θέση OFF) και ο επιλογέας τάσης στη θέση 0 Volts.
2. Χρησιμοποιείται η έξοδος της συνεχούς (κόκκινος-μαύρος ακροδέκτης D.C.) και όχι της εναλλασσόμενης τάσης (κίτρινοι ακροδέκτες, A.C.) του τροφοδοτικού.
3. Οι πολικότητες των οργάνων πρέπει να είναι όπως στο σχήμα: ξεκινώντας από τον θετικό πόλο της πηγής να καταλήγουμε στον θετικό ακροδέκτη και του βολτομέτρου και στη συνέχεια στον θετικό ακροδέκτη του αμπερομέτρου.
4. Δεν τροφοδοτούμε το κύκλωμα πριν αυτό ελεγχθεί από τον διδάσκοντα.

B. ΕΛΕΓΧΟΣ Ακολουθείστε τα παρακάτω βήματα με την σειρά:

1. Ελέγχετε πάλι αν το κύκλωμα είναι συνδεδεμένο όπως στο σχήμα (προσοχή στην πολικότητα !!!!)

2. Ρυθμίζετε το τροφοδοτικό στα **0 Volts**.
3. Επιλέγετε στο κιβώτιο αντιστάσεων αντίσταση **10 KΩ**. Αυτό γίνεται αν θέσουμε τον διακόπτη **x10 KΩ** στην θέση “1” και όλους τους υπόλοιπους στην θέση μηδέν “0”.

ΠΡΟΣΟΧΗ, ο διακόπτης **x10 KΩ** να είναι οπωσδήποτε στην θέση “1”. Σε αντίθετη περίπτωση, αν αντίσταση είναι μικρότερη, θα περάσει μεγάλο ρεύμα από το κύκλωμα, οπότε κινδυνεύει το μιλλιαμπερόμετρο, ενώ αν είναι μεγαλύτερη, δεν θα παίρνετε ικανοποιητικές ενδείξεις (η απόκλιση της βελόνας θα είναι μικρή).

4. Καλείτε τον διδάσκοντα να ελέγξει το κύκλωμα.
5. Δίνετε τροφοδοσία στο κύκλωμα από τον διακόπτη ON-OFF.
6. Αυξάνετε δοκιμαστικά και προοδευτικά την τάση από **0 έως 10 Volts**, Στην κανονική λειτουργία του κυκλώματος και σε ολόκληρη την διάρκεια της άσκησης πρέπει με την αύξηση ή μείωση της τάσης οι ενδείξεις και των δύο οργάνων να συμμεταβάλλονται και οπωσδήποτε το ρεύμα στο μιλλιαμπερόμετρο να μην ξεπεράσει το μέγιστο της κλίμακας. Σε αντίθετη περίπτωση μηδενίστε την τάση και καλέστε τον διδάσκοντα.

Γ. ΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Απαιτούνται δέκα τιμές τάσεις και ρεύματος για να συμπληρωθεί ο παρακάτω Πίνακας I.

1. Κατά την λήψη των μετρήσεων πρέπει να προσεχτούν τα εξής σημεία:
 - α) Η ανάγνωση της κλίμακας να γίνεται κάθετα προς το επίπεδο της κλίμακας του οργάνου και όχι πλάγια, προς αποφυγή του σφάλματος παράλλαξης.
 - β) Να έχετε υπολογίσει από πριν ποια είναι η ελάχιστη υποδιαίρεση της κλίμακας των οργάνων, ώστε να αποφύγετε λάθη στην καταχώριση των μετρήσεων.
2. Επιλέγετε **δέκα** τιμές τάσης από το τροφοδοτικό και καταχωρείτε στον πίνακα τις αντίστοιχες τιμές τάσης και ρεύματος. Συνήθως επιλέγουμε τάσεις από 0 έως 10 Volt σε βήματα του 1 Volt.

Πίνακας Ι. Μετρήσεις τάσεις και ρεύματος στο κύκλωμα νόμου του Ohm.

Αύξων αριθμός	Τάση (Volts)	Ρεύμα (mA)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

(Προαιρετικά: Έχοντας βαθμολογήσει κατάλληλα ένα χαρτί mm, τοποθετείτε μετά από κάθε μέτρηση και το αντίστοιχο σημείο στην γραφική παράσταση).

3. Ελέγχετε αν οι μετρήσεις του πίνακα είναι ευλογοφανείς, μηδενίζετε τη τάση και κλείνετε το τροφοδοτικό. Αποσυνδέετε και τακτοποιείτε τα όργανα.

Δ. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ακολουθείτε τις οδηγίες του διδάσκοντα

Ε. ΕΡΓΑΣΙΑ

Ακολουθείτε τις οδηγίες του διδάσκοντα. Η εργασία πρέπει να ακολουθεί το πρότυπο που σας έχει διανεμηθεί, να περιλαμβάνει τον πίνακα των μετρήσεων, τον πίνακα των υπολογισμών, την γραφική παράσταση των μετρήσεων και της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων σε χαρτί mm, και ό,τι άλλο σας ζητηθεί από τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΗ

*Εφαρμογής Θεωρίας Ελαχίστων Τετραγώνων
με μελέτη μη γραμμικού αντιστάτη*

Μελέτη – ανάπτυξη: Γ. Δημητρακόπουλος – Δ. Ευαγγελινός

ΑΣΚΗΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΑΝΤΙΣΤΑΤΗ

ΣΚΟΠΟΣ: Μέτρηση της χαρακτηριστικής απόκρισης $I-V$ των θερμίστορ και της απόκλισης από την γραμμική συμπεριφορά.

ΟΡΓΑΝΑ: Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0–10 Volts, 2 ψηφιακά πολύμετρα, θερμίστορ τύπου NTC ονομαστικής αντίστασης 1 ΚΩ. (Προαιρετικά χαρτί μιλλιμετρέ.)

1. Εισαγωγή

Όπως μάθαμε σε προηγούμενο εργαστήριο, κατά την εκτέλεση ενός πειράματος για τον προσδιορισμό της νομοτέλειας ενός φυσικού φαινομένου, πρέπει να ακολουθούμε τις απαραίτητες ενέργειες για την επιλογή κατάλληλης μεθοδολογίας μέτρησης και τον αποκλεισμό/διόρθωση των συστηματικών σφαλμάτων. Αφού υπάρξει εμπιστοσύνη στη μεθοδολογία και τα πειραματικά αποτελέσματα που προέκυψαν, στη συνέχεια επιλέγεται η καταλληλότερη νομοτελειακή περιγραφή (π.χ. γραμμική ή εκθετική συνάρτηση) και τα τυχαία σφάλματα αντιμετωπίζονται με κατάλληλη στατιστική επεξεργασία (π.χ. με τη βοήθεια της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων).

Στην παρούσα άσκηση καταδεικνύουμε ότι το τελικό αποτέλεσμα της πειραματικής ανάλυσης μπορεί να επηρεασθεί σημαντικά, αν δεν ακολουθηθούν με προσοχή τα παραπάνω δύο βήματα και δεν ληφθούν υπόψη όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά το φαινόμενο. Δείχνουμε επίσης τις απαραίτητες ενέργειες που πρέπει να γίνονται ώστε να απορρίπτεται μία ακατάλληλη περιγραφή του φαινομένου και να αντικαθίσταται από μία ορθότερη. Για το σκοπό μας, θα χρησιμοποιήσουμε μετρήσεις μιας φαινομενικά σταθερής ηλεκτρικής αντίστασης που όμως μεταβάλλεται λόγω αύξησης της θερμοκρασίας της.

Στην προηγούμενη άσκηση (Νόμος του Ohm), μετρήθηκε και σχεδιάστηκε η μεταβολή της έντασης (I) του ρεύματος που διαρρέει έναν αντιστάτη R , όταν εφαρμόζεται στα άκρα του μια τάση (V). (Στην ηλεκτρονική, η καμπύλη $I-V$ ονομάζεται και *απόκριση $I-V$*). Παρατηρήθηκε ότι η τιμή της αντίστασης R όταν η εφαρμοζόμενη τάση κυμαινόταν από 0 έως 10 Volt, παρέμεινε σταθερή και ίση περίπου με 10 ΚΩ. Για το λόγο αυτό ο συγκεκριμένος τύπος αντιστάτη ονομάζεται και *ωμικός*. Γνωρίζουμε όμως

ότι η αντίσταση ενός υλικού συνήθως εξαρτάται από την θερμοκρασία, πράγμα που σημαίνει ότι στην γενική περίπτωση οι αντιστάτες δεν είναι οπωσδήποτε ωμικοί.

Για να μετρήσουμε πειραματικά την αντίσταση ενός αντιστάτη, ο συνηθέστερος τρόπος είναι να τον συνδέσουμε σε ένα κύκλωμα τροφοδοσίας και να διαιρέσουμε την τάση στα άκρα του δια της έντασης του ρεύματος που τον διαρρέει. Αν όμως επιλέξουμε μεγάλες τιμές εφαρμοζόμενης τάσης και ρεύματος, τότε ο αντιστάτης θα θερμανθεί, διότι θα αναπτυχθεί θερμότητα Joule ($Q = I^2 \cdot R \cdot t$) και η αντίσταση που θα μετρηθεί θα είναι γενικά διαφορετική από αυτή που μετράμε σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται *αυτοθέρμανση* του υλικού και προφανώς αν δεν ληφθεί υπόψη, θα οδηγήσει σε συστηματικό σφάλμα στην τιμή της μετρούμενης αντίστασης. Συμπερασματικά, η διαδικασία και μέθοδος μέτρησης (διέλευση ρεύματος από τον αντιστάτη) επηρεάζει την τιμή του μετρούμενου μεγέθους (την αντίσταση). Τα εργαστηριακά όργανα απευθείας μέτρησης της αντίστασης (ωμόμετρα) αντιμετωπίζουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας πολύ μικρή τιμή ρεύματος κατά την μέτρηση της αντίστασης (μερικά mA, ανεξαρτήτως της τάξης μεγέθους της μετρούμενης αντίστασης) ακριβώς για να αποφύγουν το φαινόμενο της αυτοθέρμανσης.

Στην παρούσα άσκηση θα μελετήσουμε την εξάρτηση της μετρούμενης αντίστασης ενός θερμίστορ, δηλαδή ενός αντιστάτη του οποίου η αντίσταση εκ κατασκευής μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία, αφού χρησιμοποιείται σαν αισθητήρας για μέτρηση θερμοκρασιών.

2. Τα θερμίστορ

Είναι γνωστό ότι η ηλεκτρική αντίσταση ενός υλικού μπορεί να προσδιορισθεί από το νόμο του Ohm:

$$R = \frac{V}{I} \quad (1)$$

όπου V η εφαρμοζόμενη τάση και I η ένταση του ηλ. ρεύματος. Όμως η αντίσταση μπορεί να μεταβληθεί υπό την επίδραση ενός εξωτερικού αιτίου, όπως είναι π.χ. η άνοδος της θερμοκρασίας. Στην περίπτωση μιας απλής γραμμικής ηλεκτρικής αντίστασης (π.χ. μεταλλικό σύρμα), η εξάρτηση αυτή περιγράφεται από τη σχέση

$$R(T) = R_o [1 + \alpha (T - T_o)] \quad (2)$$

όπου α είναι ο θερμικός συντελεστής αντίστασης (εξαρτάται από το υλικό), και R_0 είναι η αντίσταση στη θερμοκρασία αναφοράς T_0 (συνήθως η θερμοκρασία δωματίου). Αν και κατά τη διέλευση ηλ. ρεύματος η θερμοκρασία του υλικού αυξάνει ελαφρά λόγω της μετατροπής ενός ποσοστού της ηλεκτρικής ισχύος σε θερμική, η μεταβολή της ηλ. αντίστασης δεν είναι σημαντική, επειδή ο θερμικός συντελεστής έχει πολύ μικρές τιμές. Για παράδειγμα, για τον χαλκό είναι $\alpha = 0.0039 \text{ K}^{-1}$.

Σε αντίθεση με τις απλές γραμμικές (ωμικές) αντιστάσεις, τα *θερμίστορ* είναι αντιστάτες πολύ ευαίσθητοι στη μεταβολή της θερμοκρασίας. Κατασκευάζονται από ημιαγώγιμα υλικά και μπορεί να έχουν θετικό ή αρνητικό θερμικό συντελεστή αντίστασης. Στην πρώτη περίπτωση (θερμίστορ τύπου NTC – Negative Temperature Coefficient) η αντίσταση ελαττώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (θερμίστορ τύπου PTC – Positive Temperature Coefficient) αυτή αυξάνει. Τα θερμίστορ χρησιμοποιούνται κυρίως ως αισθητήρες, θερμοστάτες, ρυθμιστές της θερμοκρασίας σε ηλεκτρονικά όργανα, οικιακές εφαρμογές, βιομηχανικές εφαρμογές, ιατρικά όργανα κλπ.

Τα θερμίστορ τύπου NTC κατασκευάζονται από οξείδια της ομάδας του σιδήρου (Fe, Cu, Ni, Mn, Cr) τα οποία με την προσθήκη άλλων οξειδίων (π.χ. του Mg, Ti) μετατρέπονται σε πολυκρυσταλλικά υλικά με ημιαγωγικές ιδιότητες. Τα υλικά που χρησιμοποιούνται στα θερμίστορ PTC είναι κυρίως οξείδια του στρόντιου και του βαρίου σε πολυκρυσταλλικές ενώσεις με άνθρακα και τιτάνιο με την προσθήκη ιόντων λανθανίου, βισμούθιου και άλλων στοιχείων. Στο εμπόριο κυκλοφορούν θερμίστορ με ονομαστική αντίσταση στους 25°C από δέκατα του Ohm έως δεκάδες MΩ.

Στο θερμίστορ, η μεταβολή της αντίστασης με τη θερμοκρασία, για μικρό σχετικά εύρος μεταβολής θερμοκρασίας, προσεγγίζεται από σχέση της μορφής

$$R = A \cdot e^{B/T} \quad (3)$$

όπου A και B είναι παράμετροι εξαρτώμενες από το υλικό. Το B κυμαίνεται μεταξύ 2000~5000 K. Τα A και B παραμένουν περίπου σταθερά στην περιοχή θερμοκρασιών λειτουργίας του θερμίστορ η οποία παρέχεται από τον κατασκευαστή (π.χ. μεταξύ 25 - 85°C). Αν χρησιμοποιήσουμε την αντίσταση R_0 στη θερμοκρασία T_0 , η (3) γράφεται

$$R = R_0 \cdot e^{B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} \quad (4)$$

Όταν το θερμίστορ διαρρέεται από ρεύμα, η αύξηση της θερμοκρασίας του προκαλεί μείωση ή αύξηση της αντίστασής του, για θερμίστορ τύπου NTC και PTC αντίστοιχα. Συγχρόνως, επειδή το θερμίστορ βρίσκεται σε περιβάλλον ατμοσφαιρικού αέρα, απάγει θερμική ισχύ προς το περιβάλλον, η οποία καθορίζεται από τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, φαινόμενο που θα μελετήσουμε σε βάθος σε επόμενη άσκηση. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η προσφερόμενη ηλεκτρική ισχύς (VI) θα ισούται με την απορροφούμενη ισχύ που απαιτείται για την άνοδο της θερμοκρασίας του θερμίστορ, συν τις θερμικές απώλειες προς το περιβάλλον, δηλαδή:

$$\text{Προσφερόμενη ηλ. ισχύς} = \text{Απορροφούμενη Ισχύς} + \text{Θερμικές απώλειες}$$

Η σχέση αυτή γράφεται:

$$VI = C \frac{dT}{dt} + \delta(T - T_{\text{περ.}}) \quad (5)$$

όπου C είναι η θερμοχωρητικότητα του υλικού (J/K), δ είναι ο συντελεστής θερμικών απωλειών (W/K), και $T_{\text{περ.}}$ είναι η θερμοκρασία περιβάλλοντος. Ο λόγος $\tau = C/\delta$ καλείται *θερμική σταθερά χρόνου* και καθορίζει το χρόνο που απαιτείται για να επέλθει θερμική ισορροπία με το περιβάλλον από τη στιγμή που διέλθει ρεύμα από το θερμίστορ. Η σταθερά χρόνου εκφράζει την θερμική αδράνεια ενός υλικού που θερμαίνεται ή ψύχεται και, για το λόγο αυτό, είναι σημαντικό κατά την μέτρηση θερμοκρασίας με θερμίστορ (ή με οποιοδήποτε άλλο θερμόμετρο) ο παρατηρητής να περιμένει να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία με το περιβάλλον πριν προβεί σε καταγραφή της μέτρησης. Τυπικές τιμές της σταθεράς χρόνου, η οποία εξαρτάται από το υλικό, τη μάζα και την επιφάνεια του θερμίστορ, είναι από μερικά δευτερόλεπτα έως λίγα λεπτά της ώρας. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό στην άσκηση να περιμένουμε να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία του θερμίστορ με το περιβάλλον πριν αυξήσουμε περαιτέρω την τάση από το τροφοδοτικό.

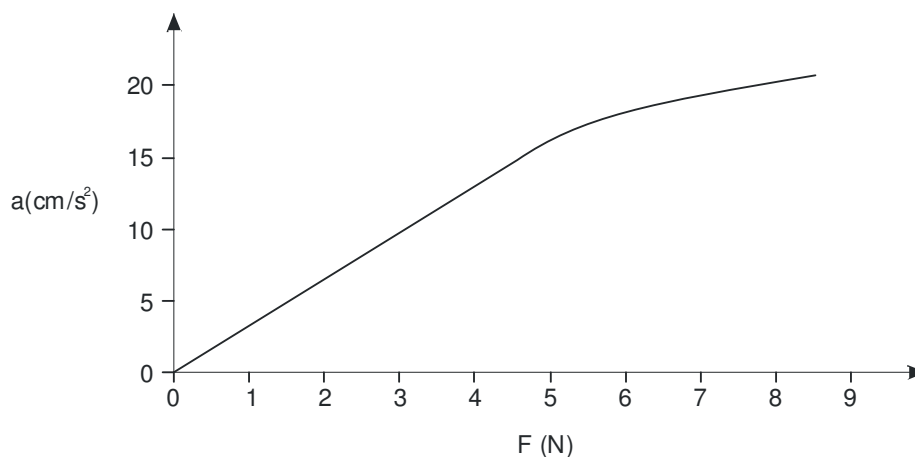
Στην περίπτωση θερμίστορ NTC, η πτώση της αντίστασής του προκαλεί αύξηση της ηλ. ισχύος ($P = V^2/R$, χρησιμοποιείται πηγή σταθερής τάσης) η οποία με τη σειρά της προκαλεί περαιτέρω πτώση της αντίστασης, με αποτέλεσμα την όλο και μεγαλύτερη αυτοθέρμανση και τελικά την καταστροφή του θερμίστορ. Με βάση τον μηχανισμό αυτό φαινόμενο αυτό κυκλοφορούν στο εμπόριο θερμίστορ που αποτελούν θερμικές ασφάλειες και καταστρέφονται (διακόπτουν το κύκλωμα) είτε όταν το διαρρεόμενο ρεύμα ξεπεράσει μια τιμή ασφαλείας, είτε όταν η θερμοκρασία του περιβάλλοντός τους ξεπεράσει ένα όριο ασφαλείας.

3. Έλεγχος ορθότητας της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων κατά την εφαρμογή σε πειραματικά δεδομένα

Η προσπάθεια προσαρμογής μίας ευθείας ελαχίστων τετραγώνων για τη νομοτελειακή περιγραφή των πειραματικών παρατηρήσεών μας πρέπει να είναι σε συμφωνία αφ' ενός με την φυσική που περιγράφει το φαινόμενο, και αφ' ετέρου με την μορφή των ίδιων των πειραματικών δεδομένων.

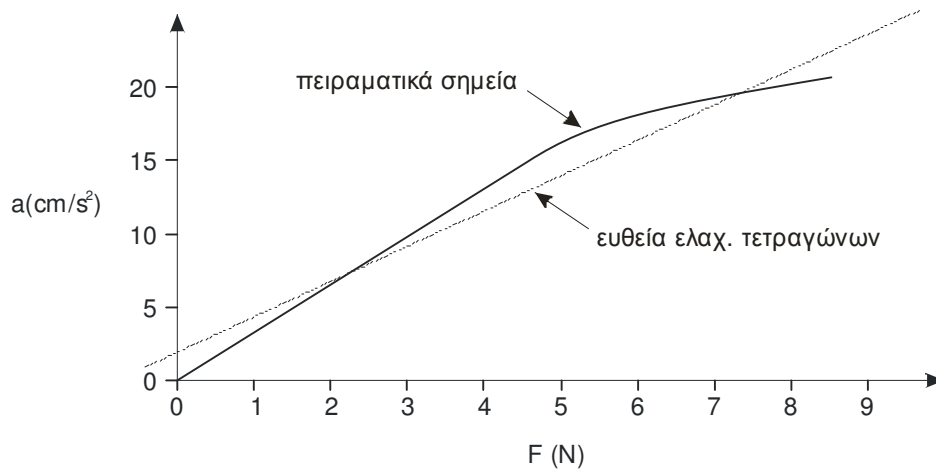
Έστω ότι θέλουμε να επεξεργαστούμε στατιστικά μετρήσεις από ένα πείραμα μηχανικής (δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα), κατά το οποίο έχουμε πάρει μετρήσεις της επιτάχυνσης a ενός σώματος συναρτήσει διαφόρων τιμών της ασκούμενης δύναμης F , σε περιβάλλον με χαμηλές τριβές. Επειδή είναι γνωστό ότι $F = m \cdot a$ και συνεπώς $a = F/m$, σχέση που περιγράφει γραμμική εξάρτηση της επιτάχυνσης από την ασκούμενη δύναμη, αυτό δικαιολογεί την πρώτη μας σκέψη να προσαρμόσουμε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων του τύπου $y = ax + b$ στα πειραματικά δεδομένα $a - F$.

Στο ίδιο πείραμα όμως, αν, για παράδειγμα, αναπτυχθούν μη αναμενόμενες δυνάμεις τριβής σε μεγάλες ταχύτητες του σώματος, είναι δυνατόν να προκύψουν πειραματικά σημεία όπως αυτά του Σχήματος 1, στο οποίο φαίνεται ότι μετά τα 5N, τα πειραματικά σημεία αποκλίνουν σημαντικά από την αρχική ευθεία $a - F$ η οποία υποδηλώνει την περιοχή ισχύος του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα. Είναι, στην περίπτωση του σχήματος, ορθή η εφαρμογή της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων για όλα τα πειραματικά σημεία;



Σχήμα 1: Υποθετικά πειραματικά σημεία πειράματος 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα.

Στο παρακάτω Σχήμα 2 φαίνεται η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, υπολογισμένη από το σύνολο των πειραματικών σημείων. Όπως είναι φανερό, η ευθεία αυτή απέχει σημαντικά από τα πειραματικά σημεία, και επιπλέον δηλώνει σαφώς την ύπαρξη μη μηδενικής επιτάχυνσης όταν η ασκούμενη δύναμη είναι μηδενική, πράγμα που δεν συμφωνεί με την φυσική πραγματικότητα.



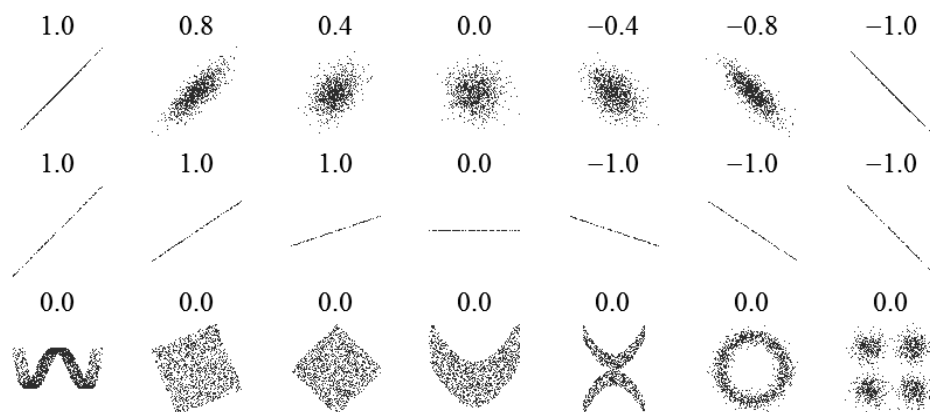
Σχήμα 2: Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων σαν αποτυχημένη απόπειρα περιγραφής του συνόλου των υποθετικών πειραματικών σημείων του πειράματος του Σχήματος 1.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να διερευνηθεί αν υπάρχει εναλλακτικός τρόπος για την αξιολόγηση της καταλληλότητας της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων με βάση την θεωρία της στατιστικής επεξεργασίας πειραματικών δεδομένων. Ένας δείκτης της ποιότητας της γραμμικής συσχέτισης πειραματικών σημείων με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι ο λεγόμενος **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης** (correlation coefficient) R . Ο συντελεστής R , που παίρνει τιμές από -1 έως +1, υπολογίζεται με βάση την γενική θεωρία ελαχίστων τετραγώνων από την σχέση:

$$R = \frac{N \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\left[\sqrt{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \right] \cdot \left[\sqrt{N \sum y^2 - (\sum y)^2} \right]} \quad (6)$$

όπου N είναι το πλήθος των πειραματικών ζευγών (x, y) .

Στην πρώτη και δεύτερη σειρά του Σχήματος 3 φαίνονται παραδείγματα του συντελεστή συσχέτισης στην περίπτωση περίπου γραμμικών νομοτελειών. Στις περιπτώσεις αυτές φαίνεται ότι $R = \pm 1$ μόνο όταν τα πειραματικά σημεία βρίσκονται ακριβώς πάνω σε μια ευθεία, ενώ όσο αυξάνεται η διασπορά των πειραματικών σημείων, ο συντελεστής R μειώνεται κατ' απόλυτη τιμή, μέχρι να πάρει την τιμή 0. Στην τελευταία αυτή περίπτωση (κεντρικό σχήμα πρώτης σειράς, “σφαιρική” κατανομή σημείων), λογιστικά υπολογίζεται μεν μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, αλλά δεν έχει φυσική σημασία, καθόσον είναι προφανές ότι δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση των πειραματικών σημείων.



Σχήμα 3: Παραδείγματα του συντελεστή συσχέτισης R υποθετικών πειραματικών δεδομένων $x-y$.

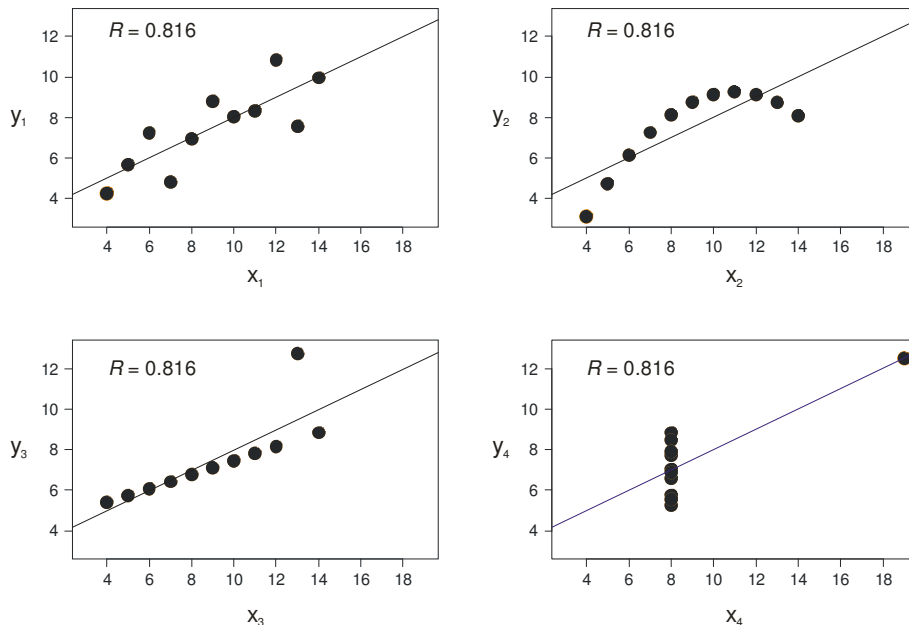
Παρατηρείστε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις του Σχήματος 3 όπου $R = 0$, τα δεδομένα $x-y$ δηλώνουν σαφώς την ύπαρξη νομοτελειακής εξάρτησης του y από το x , δηλαδή η συνθήκη $R = 0$ δεν αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την μη εξάρτηση του μεγέθους y από το φυσικό μέγεθος x . Συνεπώς, η χρησιμότητα του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης R δεν είναι απόλυτη, αλλά σχετική, με σκοπό την εκτίμηση της διασποράς πειραματικών σημείων τα οποία προφανώς είναι δυνατόν να προσεγγιστούν από μια ευθεία.

Στο παρακάτω Σχήμα 4 φαίνονται παραδείγματα υποθετικών πειραματικών δεδομένων $x-y$ που έχουν τον ίδιο ακριβώς συντελεστή συσχέτισης $R = 0.816$, μαζί με τις αντίστοιχες υπολογιζόμενες ευθείες ελαχίστων τετραγώνων. Παρατηρήστε ότι στην δεύτερη (x_2-y_2) και στην τέταρτη περίπτωση (x_4-y_4) είναι εντελώς ακατάλληλη η χρήση της ευθείας τετραγώνων. Στην τρίτη περίπτωση (x_3-y_3), αν εξαιρεθεί το

προφανώς προβληματικό σημείο (12.5, 12.5), τα υπόλοιπα πειραματικά σημεία θα είχαν πολύ μεγαλύτερο συντελεστή συσχέτισης, ενώ η αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων θα προέκυπτε πολύ κοντά στα πειραματικά σημεία.

Συνεπώς, η ενδεδειγμένη χρήση του συντελεστή συσχέτισης για πειραματικά σημεία απαιτεί τα εξής βήματα:

1. Πριν την τυφλή εφαρμογή της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων, είναι απαραίτητο να σχεδιαστεί (είτε σε χαρτί, είτε σε H/Y) η καμπύλη που παριστάνει τα πειραματικά δεδομένα και να ελεγχθεί το σχήμα της.
2. Στην περίπτωση που τα πειραματικά σημεία δεν φαίνεται δια γυμνού οφθαλμού να ανήκουν σε ευθεία, αναζητούνται διαφορετικού τύπου νομοτέλειες για την προσαρμογή των πειραματικών δεδομένων χρησιμοποιώντας βοηθητικά αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων σε ημιλογαριθμικό ή log-log χαρτί.

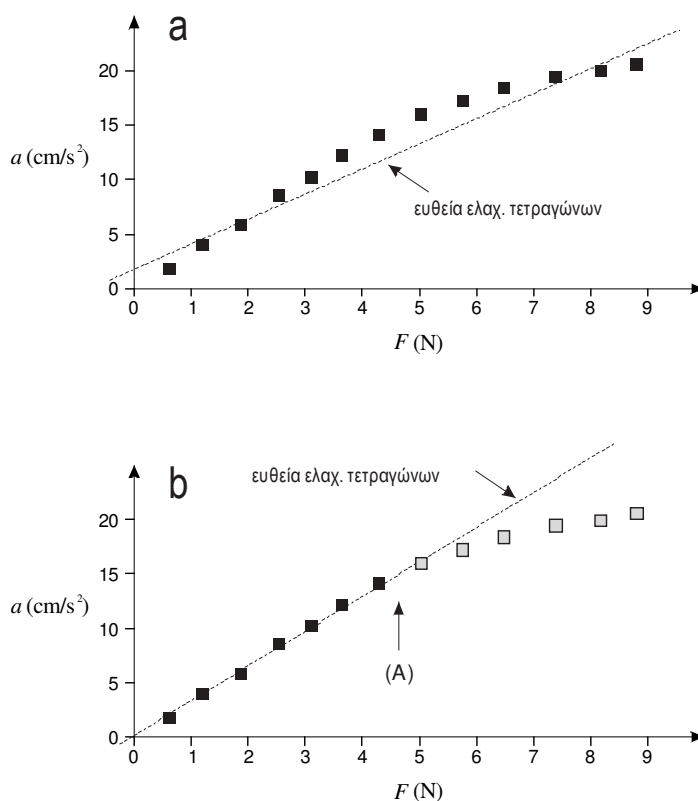


Σχήμα 4: Τέσσερις υποθετικές ομάδες πειραματικών δεδομένων x - y που έχουν τον ίδιο συντελεστή συσχέτισης $R = 0.816$ και οι αντίστοιχες ευθείες ελαχίστων τετραγώνων.

3. Στην περίπτωση που τα πειραματικά σημεία φαίνεται να ακολουθούν στην αρχή μια γραμμική νομοτέλεια και στη συνέχεια να αποκλίνουν από αυτή, όπως στο παράδειγμα του Σχήματος 1, τότε πρέπει να συμπεράνουμε ότι οι μετρήσεις μας

περιγράφουν **τουλάχιστον δύο φαινόμενα φυσικής**, τα οποία συνυπάρχουν και συνεισφέρουν με διαφορετικό τρόπο και σε διαφορετικό βαθμό στα τελικά πειραματικά αποτελέσματα. Για την επεξεργασία τέτοιων πειραματικών δεδομένων, συνήθως επιλέγεται ένα κατάλληλο νοητό σημείο (Α), το οποίο αποτελεί διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στην γραμμική και την μη γραμμική περιοχή, π.χ. το σημείο (Α) στο Σχήμα 5b. Στη συνέχεια, η θεωρία ελαχίστων τετραγώνων εφαρμόζεται **μόνο** για τα σημεία της γραμμικής περιοχής (αριστερά του σημείου (Α), βλ. Σχήμα 5b), ενώ για την στατιστική επεξεργασία των σημείων της μη γραμμικής περιοχής, αναζητείται διαφορετική νομοτέλεια (η οποία στο παράδειγμά μας θα μπορούσε να περιλαμβάνει δυνάμεις τριβής ανάλογες της ταχύτητας ή του τετραγώνου της ταχύτητας).

Στο Σχήμα 5 παριστάνεται η εσφαλμένη (πάνω) και η ορθή (κάτω) στατιστική επεξεργασία με ευθεία ελαχίστων τετραγώνων πειραματικών σημείων.



Σχήμα 5. Εσφαλμένη (α) και ορθή (β) στατιστική επεξεργασία με ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Ο συντελεστής συσχέτισης R στο αριστερό σχήμα είναι $R = 0.886$ ενώ στο δεξί $R = 0.999$.

Το πείραμα εμφανίζει στην αρχή μια γραμμική περιοχή (μαύρα τετράγωνα στο Σχ. 5b) και στη συνέχεια μη γραμμική περιοχή (γκρίζα τετράγωνα στο Σχ. 5b). Η ορθή ευθεία ελαχίστων τετραγώνων (διακεκομμένη γραμμή στο Σχ. 5b) υπολογίζεται με βάση μόνο τα πειραματικά σημεία της γραμμικής περιοχής. Ο συντελεστής συσχέτισης R στο Σχήμα 5a είναι $R = 0.886$ ενώ στο Σχήμα 5b είναι $R = 0.999$, πράγμα που υποδηλώνει ότι στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής συσχέτισης αποτελεί αντικειμενικό κριτήριο για την καταλληλότητα της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, όταν αυτή υπολογίζεται με ορθό τρόπο.

4. Πειραματικό μέρος

4.1. Εξοικείωση με το ψηφιακό πολύμετρο

Στο στάδιο αυτό συνιστάται η εξοικείωση με το ψηφιακό πολύμετρο. Έχοντας μελετήσει το Παράρτημα Α της άσκησης, στο οποίο περιγράφεται η λειτουργία του, μπορείτε να προβείτε στις εξής μετρήσεις:

1. Μέτρηση τάσης: Ανάψτε το τροφοδοτικό και περιστρέψτε τον περιστροφικό επιλογέα τάσης εξόδου στη θέση (5). Περιστρέψτε τον επιλογέα του πολύμετρου στην θέση βολτομέτρου (**V**) και συνδέστε δύο καλώδια στους ακροδέκτες εισόδου **COM** και **V/Ω/A**. Συνδέστε το πολύμετρο με τους ακροδέκτες συνεχούς τάσης (D.C.) του τροφοδοτικού, προσέχοντας την πολικότητα. Συγκρίνατε την ένδειξη του πολύμετρου με την ενδεικτική τιμή τάσης εξόδου (5 Volt) του τροφοδοτικού. Τι παρατηρείτε; Σε τι πιστεύετε ότι οφείλεται η διαφορά; Αντιμεταθέστε τα καλώδια στους ακροδέκτες εισόδου του πολύμετρου. Τι παρατηρείτε;
2. Σύγκριση μέτρησης τάσης από ψηφιακό και αναλογικό όργανο: Όπως είναι ήδη συνδεδεμένο το πολύμετρο με το τροφοδοτικό, συνδέστε **παράλληλα** με αυτά το αναλογικό βολτόμετρο (όργανο κινητού πηνίου) που χρησιμοποιήσατε στην προηγούμενη άσκηση νόμου του Ohm, **προσέχοντας ιδιαίτερα την πολικότητα** (ο θετικός ακροδέκτης εισόδου του αναλογικού βολτομέτρου να συνδεθεί με τον θετικό ακροδέκτη εξόδου του τροφοδοτικού). Με δεδομένο ότι τα δύο όργανα είναι συνδεδεμένα παράλληλα και συνεπώς μετρούν την ίδια τάση που παράγεται από το τροφοδοτικό, συγκρίνατε τις ενδείξεις τους. Συμφωνούν οι μετρήσεις αυτές; Σε τι πιστεύετε ότι οφείλεται η διαφορά;

3. Μέτρηση θερμοκρασίας περιβάλλοντος: Αποσυνδέστε όλα τα όργανα και περιστρέψτε τον επιλογέα του ψηφιακού θερμομέτρου στην θέση θερμομέτρου ($^{\circ}\text{C}$). Στην οθόνη του εμφανίζεται η θερμοκρασία περιβάλλοντος (υποθέτοντας ότι το πολύμετρο βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον και ότι δεν το έχετε θερμάνει κρατώντας το πολλή ώρα στα χέρια σας). Σημειώστε αυτή τη θερμοκρασία γιατί θα χρειαστεί στα επόμενα: $\theta_{\text{περιβάλλοντος}} = \dots\dots\dots^{\circ}\text{C}$
4. Μέτρηση αντίστασης του θερμίστορ: Περιστρέψτε τον επιλογέα του πολύμετρου στη θέση ωμόμετρου (Ω) και συνδέστε το θερμίστορ στους ακροδέκτες εισόδου **COM** και **V/ Ω /A**. Σημειώστε την αντίσταση του θερμίστορ σε θερμοκρασία περιβάλλοντος: $R_0 = \dots\dots\dots \Omega$

Στη συνέχεια, πιάστε με το χέρι σας το θερμίστορ και παρατηρήστε την σταδιακή μείωση της αντίστασης. Τι παρατηρείτε; Από ποιους παράγοντες εξαρτάται ο χρόνος αποκατάστασης της θερμικής ισορροπίας του θερμίστορ με το χέρι σας;

Αφήστε ξανά το θερμίστορ ελεύθερο και παρατηρήστε την σταδιακή αύξηση της αντίστασης. Πόσος χρόνος περίπου απαιτήθηκε για να επανέλθει η θερμική ισορροπία του θερμίστορ με το περιβάλλον;

Περιγράψτε τι περιμένετε να συμβεί αν φυσήξετε επί 15 δευτερόλεπτα το θερμίστορ α) με συνήθη ρυθμός εκπνοής και β) φυσώντας δυνατά. Ποια φαινόμενα φυσικής συμβαίνουν στις δύο περιπτώσεις;

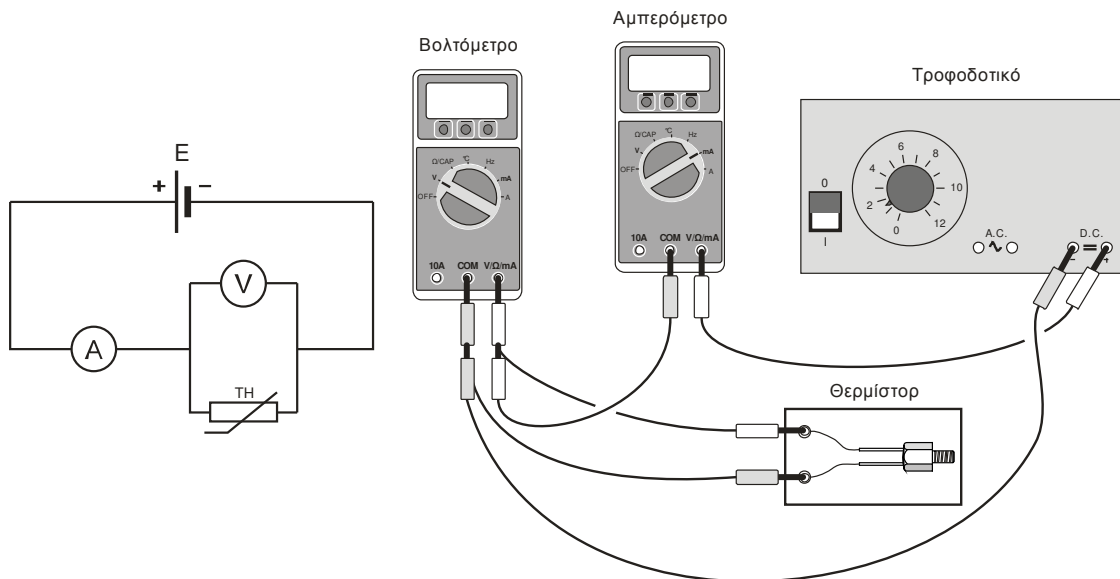
4.2. Πειραματική Διαδικασία

A. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

Κατασκευάζουμε το κύκλωμα του Σχήματος 6, προσέχοντας:

1. Το τροφοδοτικό να είναι κλειστό (διακόπτης Power Off) και στη θέση **0 Volts**.
2. Να χρησιμοποιηθεί η έξοδος της συνεχούς τάσης του τροφοδοτικού (κόκκινος και μαύρος ακροδέκτης D.C.) και όχι της εναλλασσόμενης τάσης (κίτρινοι ακροδέκτες A.C.).
3. Οι πολικότητες των οργάνων να είναι όπως στο σχήμα: ξεκινώντας από τον θετικό πόλο της πηγής να καταλήγουμε σε θετικό ακροδέκτη και του αμπερομέτρου και του βολτομέτρου (αν και τα ψηφιακά όργανα δεν κινδυνεύουν από αναστροφή

πολικότητας, όπως τα όργανα κινητού πηνίου, και απλά δίνουν αρνητικές ενδείξεις, είναι καλή πρακτική να τηρείται η ορθή πολικότητα κατά τη σύνδεση).



Σχήμα 6: Το κύκλωμα της άσκησης σε συμβολική και σχηματική αναπαράσταση. Παρατηρήστε ότι οι θετικοί ακροδέκτες των οργάνων συνδέονται με καλώδια με λευκά βύσματα, ενώ οι αρνητικοί με γκρίζα βύσματα.

4. Το τροφοδοτικό να είναι **κλειστό** (διακόπτης Power Off) και στη θέση **0 Volts**.
5. Να χρησιμοποιηθεί η έξοδος της **συνεχούς** τάσης του τροφοδοτικού (κόκκινος και μαύρος ακροδέκτης D.C.) και όχι της εναλλασσόμενης τάσης (κίτρινοι ακροδέκτες A.C.).
6. Οι πολικότητες των οργάνων να είναι όπως στο σχήμα: ξεκινώντας από τον **θετικό** πόλο της πηγής να καταλήγουμε σε **θετικό** ακροδέκτη και του αμπερομέτρου και του βολτομέτρου (αν και τα ψηφιακά όργανα δεν κινδυνεύουν από αναστροφή πολικότητας, όπως τα όργανα κινητού πηνίου, και απλά δίνουν αρνητικές ενδείξεις, είναι καλή πρακτική να τηρείται η ορθή πολικότητα κατά τη σύνδεση).
7. Τα δύο όργανα μέτρησης της άσκησης στην ουσία είναι δύο όμοια ψηφιακά πολύμετρα, τα οποία ανάλογα με την θέση του περιστροφικού επιλογέα λειτουργούν είτε ως αμπερόμετρο είτε ως βολτόμετρο (βλέπε Παράρτημα Α της άσκησης). Επιπλέον, έχουν την δυνατότητα να αλλάζουν την κλίμακα μέτρησης

- (να στρογγυλεύουν την ένδειξη σε δεδομένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων) με διαδοχικά πατήματα του κουμπιού **RAN** (από το Range, κλίμακα τιμών) που βρίσκεται κάτω από την ένδειξη του οργάνου.
8. Περιστρέφετε τον επιλογέα του πρώτου οργάνου (το Αμπερόμετρο στο Σχήμα 6) στη θέση Αμπερόμετρου (**mA**) και επιλέγετε κλίμακα δύο δεκαδικών ψηφίων, με διαδοχικά πατήματα του κουμπιού **RAN**, μέχρις αυτό να δείξει δύο ψηφία μετά την υποδιαστολή.
 9. Περιστρέφετε τον επιλογέα του δεύτερου οργάνου (το Βολτόμετρο στο Σχήμα 6) στη θέση Βολτόμετρου (**V**) και επιλέγετε κλίμακα δύο δεκαδικών ψηφίων, με διαδοχικά πατήματα του κουμπιού **RAN**, μέχρις αυτό να δείξει δύο ψηφία μετά την υποδιαστολή.
 10. Δεν δίνετε τάση στο κύκλωμα πρίν αυτό ελεγχθεί από τον διδάσκοντα.

B. ΕΛΕΓΧΟΣ ΟΡΘΗΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ

Ακολουθείστε τα παρακάτω βήματα με την σειρά:

1. Ελέγχετε πάλι αν το κύκλωμα είναι συνδεδεμένο όπως στο Σχήμα 6, αν το τροφοδοτικό είναι κλειστό και αν η τάση είναι 0 Volts.
2. Καλούμε τον διδάσκοντα να ελέγξει το κύκλωμα.
3. Δίνουμε τροφοδοσία στο κύκλωμα από τον διακόπτη ON-OFF.
4. Για δοκιμή, αυξάνουμε αργά και προοδευτικά την τάση **από 0 έως 10 Volts**. Στην κανονική λειτουργία του κυκλώματος και σε ολόκληρη την διάρκεια της άσκησης, πρέπει με την αύξηση ή μείωση της τάσης οι ενδείξεις και των δύο οργάνων να συμμεταβάλλονται. Σε αντίθετη περίπτωση, μηδενίστε την τάση, κλείστε το τροφοδοτικό και καλέστε τον διδάσκοντα.
5. Αν κάποιο από τα όργανα δίνει αρνητική ένδειξη, μηδενίστε την τάση από το τροφοδοτικό και επανελέγξτε την πολικότητα της σύνδεσης του οργάνου.
6. Αν το Αμπερόμετρο έχει μόνιμα μηδενική ένδειξη, το πιθανότερο είναι να έχει καεί η εσωτερική του ασφάλεια προστασίας. Καλέστε τον διδάσκοντα.

Γ. ΛΗΨΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Απαιτούνται 20 τιμές τάσεις και ρεύματος για να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας μετρήσεων.

Πίνακας Ι: Μετρήσεις τάσεις και ρεύματος στο κύκλωμα του θερμίστορ.

a/a	Τάση V (Volt)	Ρεύμα I (mA)	a/a	Τάση V (Volt)	Ρεύμα I (mA)
1	0.00		12		
2	0.50		13		
3	1.00		14		
4	...		15		
5			16		
6			17		
7			18		
8			19		
9			20		
10			21	10.00	
11					

1. Κατά την λήψη των μετρήσεων πρέπει να προσεχτούν τα εξής σημεία:
 - α) Το τροφοδοτικό στην κυκλική του κλίμακα δίνει ενδεικτικές τιμές τάσης, οι οποίες δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα και συνεπώς **δεν έχουν την απαιτούμενη πιστότητα ώστε να αποτελέσουν πειραματικές μετρήσεις**. Στην άσκηση, σαν τάση στα άκρα του θερμίστορ θεωρείται αυτή που μετράται από το ψηφιακό βολτόμετρο.
 - β) Μετά από κάθε μεταβολή της τάσης από το τροφοδοτικό, να περιμένετε να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία με το περιβάλλον του θερμίστορ (οι ενδείξεις ρεύματος να σταθεροποιηθούν). Ιδιαίτερα μετά από τα 6 Volt, θα παρατηρήσετε ότι απαιτούνται όλο και μεγαλύτεροι χρόνοι αποκατάστασης της ισορροπίας.

γ) Η τάση από το τροφοδοτικό **δεν πρέπει να ξεπεράσει τα 10 Volt**, γιατί το θερμίστορ κινδυνεύει να καταστραφεί λόγω υπερθέρμανσης!

- Αυξάνετε την τάση από το τροφοδοτικό ώστε να μετράτε στο Βολτόμετρο τάση από τα 0 Volt μέχρι τα 10 Volt με βήμα 0.50 Volt και συμπληρώνετε τον παρακάτω Πίνακα I.

Πίνακας I: Μετρήσεις τάσεις και ρεύματος στο κύκλωμα του θερμίστορ.

α/α	Τάση V (Volt)	Ρεύμα I (mA)	α/α	Τάση V (Volt)	Ρεύμα I (mA)
1	0.00		12		
2	0.50		13		
3	1.00		14		
4	...		15		
5			16		
6			17		
7			18		
8			19		
9			20		
10			21	10.00	
11					

(Προαιρετικά: Έχοντας βαθμολογήσει κατάλληλα το χαρτί mm, τοποθετείτε μετά από κάθε μέτρηση και το αντίστοιχο σημείο στην γραφική παράσταση)

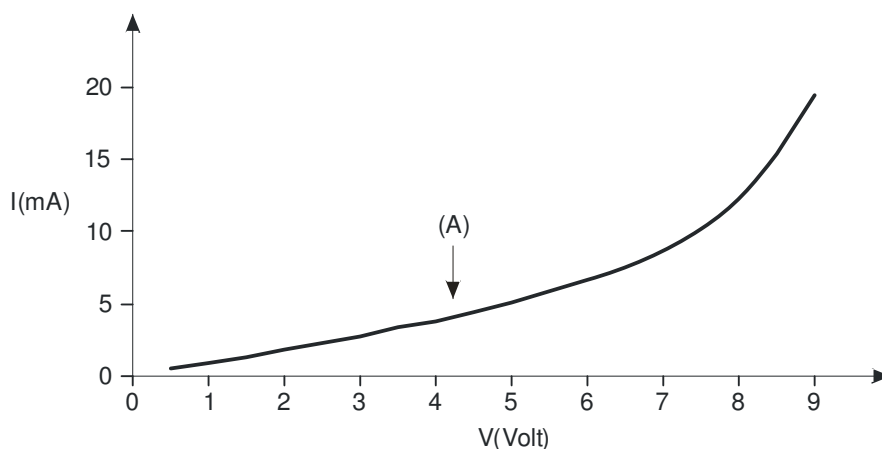
- Ελέγχετε αν οι μετρήσεις του πίνακα είναι ευλογοφανείς. **Διαβάζετε την επόμενη παράγραφο Δ** που αφορά την επεξεργασία των μετρήσεων, μήπως χρειάζεται να πάρετε κάποια συμπληρωματική μέτρηση. Μηδενίζετε τη τάση και κλείνετε το

τροφοδοτικό. Αποσυνδέετε και τακτοποιείτε τα όργανα στον πάγκο εργασίας σας, όπως τα βρήκατε στην αρχή της άσκησης.

Δ. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ – ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1. Σχεδιάστε σε γραμμικούς άξονες την γραφική παράσταση της έντασης συναρτήσει της τάσης. Αναμένεται να πάρετε μια γραφική παράσταση $I-V$ σαν αυτή του Σχήματος 7.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7, για μικρές τιμές εφαρμοζόμενης τάσης, το θερμίστορ συμπεριφέρεται σαν ωμικός αντιστάτης και η καμπύλη $I-V$ έχει περίπου σταθερή κλίση μέχρι το σημείο (Α). Μετά από το σημείο (Α), έχει αρχίσει να γίνεται εμφανές το φαινόμενο της αυτοθέρμανσης (το οποίο συνέβαινε και στην αρχή της καμπύλης, αλλά σε μη ανιχνεύσιμο βαθμό), με αποτέλεσμα την αύξηση της καμπυλότητας της καμπύλης.



Σχήμα 7. Αναμενόμενη μορφή της γραφικής παράστασης από μετρήσεις $I-V$ σε θερμίστορ τύπου NTC .

2. Σχεδιάστε σε γραμμικούς άξονες την γραφική παράσταση της αντίστασης του θερμίστορ R (η οποία υπολογίζεται σαν πηλίκο V/I) συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης V . Παρατηρήστε ότι για μικρές τιμές τάσης η αντίσταση είναι περίπου σταθερή, ενώ για μεγαλύτερες, αυτή μειώνεται σημαντικά. Για την ευκολότερη επιλογή του σημείου (Α), παρουσιάζει κάποιο πλεονέκτημα η χρήση της καμπύλης $R-V$ σε σχέση με την καμπύλη $I-V$; Για ποιο λόγο η καμπύλη $R-V$ έχει πολύ μεγαλύτερη διασπορά πειραματικών σημείων από την καμπύλη $I-V$;

3. Επιλέξτε κατάλληλο πλήθος πειραματικών σημείων στην αρχή της πειραματικής καμπύλης $I-V$ (μέχρι το σημείο (Α), στο οποίο αρχίζει η απόκλιση από την ευθεία) και εφαρμόστε για αυτά την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Σχολιάστε το κατά πόσο η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων διέρχεται από το σημείο (0, 0).
4. Υπολογίστε την αντίσταση του θερμίστορ σε θερμοκρασία δωματίου και την αβεβαιότητα στην τιμή αυτή. Η αντίσταση και η αβεβαιότητα μπορούν να υπολογιστούν με δύο τρόπους: α) από το μέσο όρο της αντίστασης $R = V/I$ στη γραμμική περιοχή του διαγράμματος $R-V$, και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση στον μέσο όρο και β) με βάση την επεξεργασία της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων στη γραμμική περιοχή του διαγράμματος $I-V$ και χρήση των τύπων αβεβαιότητας στους συντελεστές της ευθείας (τους τύπους αυτούς μπορείτε είτε να τους αναζητήσετε στο διαδίκτυο, ή να τους ζητήσετε από τον διδάσκοντα).
5. Συγκρίνατε την τιμή της υπολογιζόμενης αντίστασης του θερμίστορ σε θερμοκρασία δωματίου με αυτή με που μετρήσατε απευθείας με το ψηφιακό πολύμετρο στο στάδιο εξοικείωσης (παράγραφος 4.1.4). (Αν δεν έχετε πάρει τη μέτρηση αυτή, μπορείτε την πάρετε τώρα, αφού περιμένετε μερικά λεπτά μετά το τέλος των μετρήσεων του Πίνακα Ι, ώστε το θερμίστορ να έχει επανέλθει σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον). Τι συμπεραίνετε;
6. Εφαρμόστε θεωρία ελαχίστων τετραγώνων για όλο το εύρος τιμών των μετρήσεών σας, υποθέτοντας απλή γραμμική μεταβολή, και συγκρίνατε τον συντελεστή συσχέτισης R με αυτόν που προκύπτει από την ορθή εφαρμογή της θεωρίας ελαχίστων τετραγώνων για την γραμμική περιοχή. Κατασκευάστε ένα διάγραμμα ανάλογο με αυτό του Σχήματος 5 (σύγκριση των σχημάτων (α) και (β)) και σχολιάστε το.

6. Ερωτήσεις

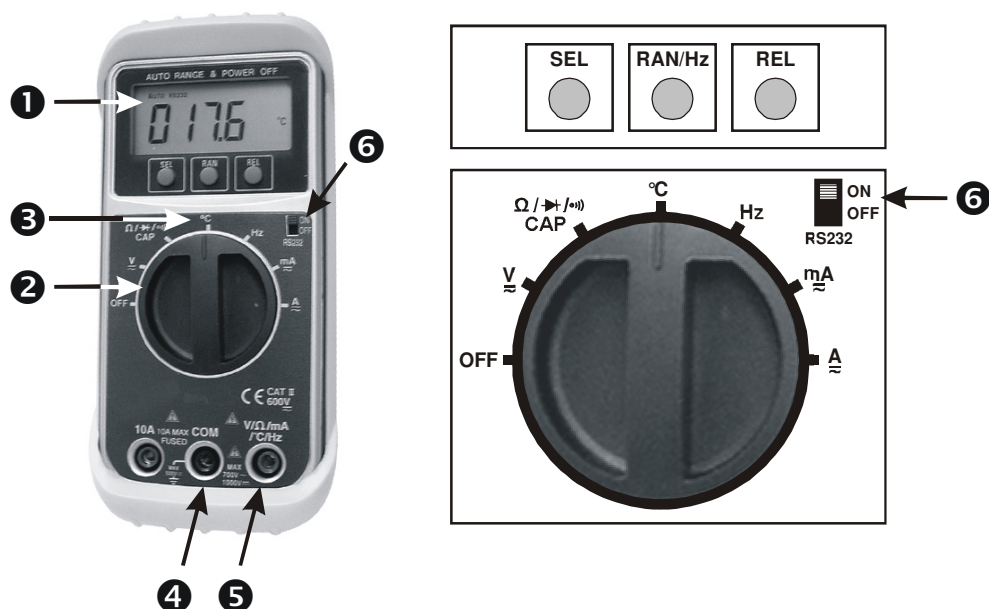
1. Με βάση τις πειραματικές σας μετρήσεις, ευσταθεί ο ισχυρισμός ότι στο πείραμά μας υπάρχουν δύο νομοτέλειες που συνυπάρχουν, αλλά κυριαρχεί η μία έναντι της άλλης από κάποια τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης;
2. Σχεδιάστε τα πειραματικά σημεία έντασης – τάσης σε ημιλογαριθμικό διάγραμμα (με γραμμικό τον οριζόντιο άξονα των τάσεων). Παρατηρήστε ότι η μη γραμμική περιοχή του γραμμικού διαγράμματος $I-V$ στο ημιλογαριθμικό διάγραμμα μπορεί

να προσεγγιστεί από μια ευθεία. Με βάση το δεδομένο αυτό, μπορείτε να προτείνετε μια νομοτέλεια η οποία να ισχύει προσεγγιστικά για αυτή τη μη γραμμική περιοχή;

3. Μπορείτε να προτείνετε μια συνολική (ενιαία) έκφραση για την περιγραφή του συνολικού φαινομένου;
4. Είναι δυνατόν να κατασκευαστεί α) ένα θερμόμετρο και β) ένα όργανο μέτρησης της ταχύτητας του ανέμου (ανεμόμετρο), με βάση τα όργανα της άσκησης; Ποια διαδικασία θα έπρεπε να ακολουθήσετε ώστε να τα βαθμολογήσετε;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Μετρήσεις με το ψηφιακό πολύμετρο

Το ψηφιακό πολύμετρο που χρησιμοποιείται στην άσκηση έχει την δυνατότητα μέτρησης των ηλεκτρικών μεγεθών τα οποία φαίνονται στις αντίστοιχες θέσεις λειτουργίας του περιστροφικού επιλογέα, δηλαδή τάση (V), ρεύμα (mA, A), αντίσταση (Ω), χωρητικότητα (CAP), καθώς και συχνότητα (Hz) και θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$).



Σχήμα Π1: Το ψηφιακό πολύμετρο και ο περιστροφικός επιλογέας του

1. Οθόνη
2. Περιστροφικός επιλογέας
3. Θέσεις του επιλογέα για μετρήσεις διαφόρων μεγεθών
4. **COM:** Αρνητικός ακροδέκτης εισόδου (γείωση)
5. **V/ Ω /mA:** Θετικός ακροδέκτης εισόδου
6. Διακόπτης σειριακής εξόδου προς υπολογιστή

Προφανώς, για να μετρήσετε τάση, ο περιστροφικός επιλογέας πρέπει να βρίσκεται στη θέση **V**, για να μετρήσετε ένταση ρεύματος, ο περιστροφικός επιλογέας πρέπει να είναι στην θέση **mA**, και για να μετρήσετε αντίσταση, πρέπει ο επιλογέας να είναι στη θέση **Ω** .

Το πλήκτρο **SEL** επιλέγει τον τρόπο λειτουργίας του πολύμετρου όταν η θέση του περιστροφικού επιλογέα αντιστοιχεί σε πολλαπλά φυσικά μεγέθη εισόδου. Στην θέση μέτρησης τάσης ή αντίστασης, το πλήκτρο **SEL** επιλέγει μεταξύ μετρήσεων συνεχών ή εναλλασσομένων μεγεθών (ένδειξη 'AC' στο αριστερό μέρος της οθόνης). Στην άσκηση, επειδή μετρούμε μόνο συνεχή μεγέθη, προσέχουμε να μην έχουμε ένδειξη AC. Όταν θέλουμε να μετρήσουμε αντίσταση (θέση ' Ω ' του επιλογέα), πρέπει να εμφανίζεται στο δεξί μέρος της οθόνης του η ένδειξη '**M Ω** ' ή '**k Ω** ' ή ' **Ω** ' και όχι π.χ. nF (χωρητικότητα), η οποία μετράται στην ίδια θέση του περιστροφικού επιλογέα.

Το πλήκτρο **RAN** (από το αγγλικό 'RANge', περιοχή μετρήσεων) επιλέγει την περιοχή εύρους λειτουργίας του οργάνου. Με διαδοχικά πατήματα του πλήκτρου, το όργανο αλλάζει όλες τις διαθέσιμες περιοχές εύρους λειτουργίας του, με αποτέλεσμα την αλλαγή του πλήθους των δεκαδικών ψηφίων της ένδειξης και συνεπώς αλλαγή της διακριτικής του ικανότητας (αλλαγή της ακρίβειας, αλλά όχι αλλαγή της πιστότητας των μετρήσεων!).